COURS
D'ANALYSE
DE
L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Cet ouvrage se trouve aussi :

A ANGOULÊME. .	chez PEREZ-LECLER.
BORDEAUX. . .	— CHAUMAS.
BOURGES. . . .	— VERMEIL.
BREST.	— Me Vve LEFOURNIER.
CHERBOURG. .	— LEFRANÇOIS.
LILLE.	— VANACKÈRE.
LORIENT. . . .	— LEROUX-CASSART.
LYON.	— PERISSE frères.
	— GIBERTON et BRUN.
MARSEILLE. . .	— CAMOIN.
METZ.	— WARION.
MONTPELLIER.	— SÉWALLE.
NANCY.	— G. GRIMBLOT et Cie.
NANTES.	— FOREST aîné.
	— GUÉRAUD.
	— PETITPAS.
ORLÉANS. . . .	— GATINEAU.
RENNES.	— VERDIER.
ROCHEFORT. .	— Mme FLEURY.
ROUEN.	— LEBRUMENT.
STRASBOURG. .	— TREUTTEL et WURTZ.
	— Mme LEVRAULT.
	— DERIVAUX.
TOULON. . . .	— MONGE et WILLAMUS.
TOULOUSE. . .	— GALLON sœurs.
	— BON et PRIVAT.
	— GIMET.
LONDRES. . . .	— DULAU et Cie, Soho-Square.
	— BAILLIÈRE.
MADRID	— A. POUPART et frère.
	— MONIER.
TURIN	— BOCCA.
VIENNE.	— ROHRMANN.

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

COURS
D'ANALYSE
DE
L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE;

Par M. DUHAMEL,
Membre de l'Institut (Académie des Sciences).

PREMIÈRE PARTIE.
SECONDE ÉDITION

PARIS,
BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES, ETC.
QUAI DES AUGUSTINS, 55.
LEIPSIG, L. MICHELSEN, LIBRAIRE.
1847.

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la signature du Libraire-Éditeur, sera contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces Exemplaires.

Bachelier

AVERTISSEMENT.

Dans la première édition de ce Cours, nous avions considéré les différentielles comme les accroissements infiniment petits des variables; dans celle-ci, nous les considérons, non comme les accroissements eux-mêmes, mais comme des quantités dont les rapports sont égaux aux limites des rapports de ces accroissements. Cette définition est précisément celle que Leibnitz a donnée d'abord, mais à laquelle il n'est pas toujours resté fidèle. Les géomètres sont partagés entre ces deux manières de voir, qui, du reste, conduisent avec la même rigueur aux résultats. Dans la première, les équations différentielles sont ce que Carnot appelle des *équations imparfaites*, c'est-à-dire dans lesquelles on néglige d'écrire un terme complémentaire qui disparaît à la limite. Dans la seconde, ces équations sont exactes par elles-mêmes, ce qui peut paraître plus clair aux commençants: c'est celui que nous adoptons ici, tout en trouvant le premier aussi facile et aussi rigoureux.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

FIN DE LA TABLE DE LA PREMIÈRE PARTIE

COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

PREMIÈRE PARTIE.

1. La notion des limites, qui est la base du calcul infinitésimal, n'était point étrangère aux anciens géomètres. Ils y furent conduits, comme nous allons l'indiquer en peu de mots, lorsque, dans la mesure des quantités géométriques, ils cherchèrent à aller au delà des figures terminées par des lignes droites, et des corps terminés par des plans.

Lorsque l'on veut comparer des grandeurs de même espèce, on commence par se faire une idée nette et précise de l'égalité. On passe de là à la comparaison des grandeurs inégales, en les décomposant, quand cela se peut, en parties égales; et le rapport des nombres de ces parties est le rapport même des grandeurs. Mais il arrive souvent que cette décomposition est impossible, ou qu'elle serait aussi difficile à obtenir que la solution de la question même que l'on a en vue.

Ainsi, dans la géométrie, la décomposition en parties égales conduit à la comparaison des rectangles; celle-ci conduit facilement à celle des parallélogrammes, puis des triangles, et enfin de tous les polygones rectilignes, qui

peuvent toujours être considérés comme composés d'un nombre déterminé de triangles.

Mais si quelques-uns des côtés d'un polygone étaient courbes, on ne pourrait plus le décomposer en triangles, et ramener de proche en proche sa mesure à la simple considération de l'égalité. La même difficulté se présente dans la comparaison des surfaces et des volumes des corps qui ne sont pas terminés de tous côtés par des plans. Leur mesure exige de nouvelles méthodes d'investigation; et cette découverte, qui est due aux géomètres de l'antiquité, est un des plus grands pas qui aient été faits dans la science.

L'idée qui s'est présentée d'abord à eux a été de substituer à ces quantités d'autres quantités qui en différassent très-peu, et de l'espèce de celles qu'ils savaient comparer. Le rapport de ces dernières devait d'autant moins différer de celui des premières, que les quantités substituées différaient moins des proposées; et si cette différence tendait indéfiniment vers zéro, le rapport des quantités auxiliaires devait tendre vers celui des quantités proposées, et finir par en différer d'une quantité moindre que toute grandeur donnée. Il ne s'agissait donc plus que de reconnaître cette limite d'une manière rigoureuse.

Ainsi, par exemple, pour trouver le rapport des surfaces de deux cercles, ils substituaient à ces figures curvilignes des polygones inscrits ou circonscrits; et pour que la comparaison fût plus facile, ils les prenaient réguliers et semblables. Ils démontraient qu'en augmentant indéfiniment le nombre des côtés de ces polygones, leurs surfaces pouvaient différer de celles des cercles, de quantités moindres que toute grandeur donnée, quelque petite qu'elle fût. Or, comme le rapport des polygones était toujours le même que celui des carrés des rayons des cercles,

et que d'une autre part il devait avoir pour limite celui des cercles eux-mêmes, ils apercevaient, comme conséquence nécessaire, que le rapport des cercles était le même que le rapport des carrés de leurs rayons. Mais une pareille conclusion ne leur aurait pas paru suffisamment justifiée, surtout en présence de sophistes subtils qui trouvaient des arguments pour nier les choses les plus évidentes. Ils prenaient alors une sorte de détour pour prouver, sans réplique, la vérité qu'ils avaient ainsi découverte; et ils montraient que si le rapport des cercles était plus petit ou plus grand que celui des carrés de leurs rayons, on serait conduit par des raisonnements incontestables à une absurdité manifeste. L'inégalité de ces rapports étant ainsi démontrée impossible, on ne pouvait se refuser à en admettre l'égalité.

Le procédé qui consiste à démontrer la vérité d'une proposition par l'absurdité qui résulterait de la supposition qu'elle serait fausse, est connu sous le nom de *réduction à l'absurde*.

Les modernes, sans rien changer au principe de cette méthode, ont présenté les démonstrations d'une manière plus naturelle et plus analytique; mais surtout ils en ont poussé les applications beaucoup plus loin, avec le secours du calcul algébrique, dont les anciens n'avaient que des notions très-élémentaires.

La méthode des limites servant de base à presque tout ce qui fait l'objet de ce Cours, nous allons faire connaître en quoi elle consiste. Mais nous commencerons par présenter quelques notions préliminaires indispensables.

Des fonctions en général, et de la continuité.

2. On désigne sous le nom de *variable* toute quantité qui, dans la question où on la considère, est susceptible de recevoir successivement différentes valeurs.

On nomme *variables indépendantes* celles dont les valeurs sont entièrement arbitraires; et *variables dépendantes* ou *fonctions*, celles dont les valeurs sont déterminées par celles de certaines autres quantités, quelle que soit la nature de cette dépendance, et soit qu'il s'agisse de quantités concrètes ou de quantités évaluées en nombres. Dans le premier cas on a des *fonctions concrètes*, et dans le second des *fonctions analytiques*.

Les fonctions analytiques se distinguent en fonctions *explicites* et fonctions *implicites*. Les premières sont celles dont les valeurs peuvent s'obtenir au moyen d'opérations indiquées et que l'on sait effectuer; les autres sont celles qui sont liées aux variables indépendantes par des équations non résolues : dans ce cas, les opérations à effectuer pour former les valeurs des fonctions ne sont pas indiquées. On les connaîtrait par la résolution des équations données, et les fonctions deviendraient alors explicites.

Les fonctions explicites se subdivisent en *algébriques* et *transcendantes*. Les premières sont celles où les seules opérations indiquées sont des additions, soustractions, multiplications, divisions, élévations à des puissances et extractions de racines de degrés connus; les autres sont celles qui renferment d'autres opérations indiquées sur les variables : comme, par exemple, les quantités exponentielles, les logarithmes, les lignes trigonométriques, etc.

Lorsqu'une seule de ces diverses opérations est indiquée sur une variable, on a une fonction *simple* de cette variable. Lorsque plusieurs d'entre elles sont accumulées les unes sur les autres, on a ce que l'on appelle une *fonction de fonctions*. Toutes les fonctions qui ne rentrent pas dans ces deux cas se nomment *fonctions composées*.

Lorsque deux variables sont liées par une équation

quelconque, elles sont fonctions l'une de l'autre. La forme de ces deux fonctions est différente si les deux variables n'entrent pas dans l'équation d'une manière symétrique. On leur donne, l'une par rapport à l'autre, le nom de *fonctions inverses*. Si, par exemple, on résout par rapport à x les équations suivantes, qui sont résolues par rapport à y,

$$y = x^m, \quad y = a^x, \quad y = \sin x, \ldots$$

on obtient

$$x = \sqrt[m]{y}, \quad x = \log y, \quad x = \arcsin y.$$

Ainsi, d'après notre définition, la racine $m^{ième}$ est la fonction inverse de la puissance m; le logarithme est la fonction inverse de l'exponentielle, etc.

3. *Continuité.* — Une variable est continue lorsqu'elle ne peut passer d'une valeur quelconque à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires. Une fonction est dite *continue* lorsqu'en faisant varier d'une manière continue les quantités dont elle dépend, elle est constamment réelle et varie elle-même d'une manière continue, c'est-à-dire qu'elle ne peut passer d'une valeur à une autre sans passer par toutes les intermédiaires. Une fonction peut être continue tant que les variables dont elle dépend restent renfermées entre certaines limites, et cesser de l'être, ou devenir discontinue, en dehors de ces limites.

Pour démontrer qu'une fonction qui est réelle entre certaines limites de la variable est continue, il suffit de faire voir que l'on peut faire croître la variable par degrés assez petits pour que les accroissements correspondants de la fonction soient moindres qu'une grandeur quelconque : car, si cette fonction n'était pas continue, il faudrait qu'elle passât brusquement d'une certaine valeur à une autre qui en différerait d'une quantité finie; ce qui

est absurde, puisque l'accroissement de la fonction peut être rendu moindre que toute grandeur donnée. C'est ainsi que, dans les éléments, on a démontré que toutes les fonctions simples sont continues, et que, par conséquent, il en est de même des fonctions composées. Réciproquement, toute fonction continue d'une variable jouit de la propriété, que ses accroissements peuvent devenir moindres que toute quantité donnée, pourvu que l'on donne des valeurs suffisamment petites aux accroissements de la variable : car, si l'accroissement donné à la variable, à partir d'une de ses valeurs, tendait vers zéro, sans qu'il en fût ainsi de l'accroissement de la fonction, il en résulterait que la fonction passerait brusquement d'une valeur à une autre qui en différerait d'une quantité finie, et que, par conséquent, elle ne serait pas continue.

Si l'on considère les valeurs d'une fonction continue comme les ordonnées, et les valeurs correspondantes de la variable indépendante comme les abscisses, les points ainsi obtenus se suivront sans interruption et formeront une ligne continue qui sera la représentation géométrique de la fonction analytique.

Méthode des limites.

4. On appelle *limite* d'une quantité variable une quantité fixe dont elle approche *indéfiniment*, c'est-à-dire de telle sorte que leur différence puisse devenir moindre que toute grandeur assignée, sans cependant se réduire jamais rigoureusement à zéro.

Une même quantité ne peut évidemment tendre en même temps vers deux limites inégales.

Si deux quantités variables dépendent de certaines autres, de telle sorte qu'elles restent constamment égales entre elles dans tous les états par lesquels elles passent, et

que l'on sache que l'une d'elles tend vers une limite, on peut affirmer que l'autre a la même limite: car, puisqu'elle est toujours égale à la première, elle s'approchera indéfiniment de la quantité fixe dont celle-ci est supposée s'approcher indéfiniment.

Cela posé, considérons une équation dont les deux membres soient des *fonctions continues* de variables quelconques x, y, z, etc., dépendantes ou indépendantes les unes des autres, et représentons-la par

$$F(x, y, z, \ldots) = f(x, y, z, \ldots).$$

Supposons que les variables x, y, z, etc., tendent simultanément, d'une manière continue ou discontinue, vers les limites respectives a, b, c, etc., et proposons-nous de découvrir la relation qui lie entre elles ces limites, en admettant que les fonctions restent continues dans le voisinage de ces valeurs des variables. Pour cela, observons que, F et f désignant des fonctions continues de x, y, z, etc., elles subissent des accroissements très-petits lorsque ces variables changent elles-mêmes de quantités très-petites, et que ces accroissements correspondants tendraient en même temps vers la limite zéro: donc, si l'on conçoit que x, y, z, etc., tendent simultanément, et suivant des lois quelconques, vers les limites a, b, c, les fonctions $F(x, y, z, \ldots)$, $f(x, y, z, \ldots)$ tendront indéfiniment vers $F(a, b, c, \ldots)$, $f(a, b, c, \ldots)$. Mais les limites de quantités égales sont égales: donc on aura nécessairement

$$F(a, b, c, \ldots) = f(a, b, c, \ldots),$$

c'est-à-dire que la relation entre les limites sera identiquement la même que celle qui avait lieu constamment entre les variables; et qu'il suffit de changer dans celle-ci les variables dans leurs limites, pour avoir la relation qui existe entre ces dernières.

Telle est la proposition qui sert de base à la méthode des limites, et la méthode elle-même consiste à considérer les quantités dont on veut découvrir la relation, comme limites de quantités plus simples, et à chercher la relation de ces dernières. Lorsqu'elle est établie, il ne reste plus, d'après le théorème précédent, qu'à substituer à toutes les variables leurs limites respectives.

5. Les quantités variables qui ont pour limites les quantités proposées peuvent être choisies de bien des manières différentes, et ce choix est très-important. Les calculs peuvent être très-simples ou très-compliqués, suivant la nature de ces variables; et dans chaque cas particulier il faudra s'attacher d'abord à reconnaître quelles sont celles qui donneront le plus de facilité au calcul. Ainsi, par exemple, quand on cherche la relation entre les surfaces de deux cercles et leurs rayons, on considère ces cercles comme limites de polygones réguliers semblables, parce que la relation entre ces polygones et les rayons des cercles est très-facile à obtenir; tandis qu'elle aurait été très-difficile à découvrir si l'on avait supposé différents les nombres des côtés des deux polygones, et que de plus on ne les eût pas supposés réguliers. Au reste, si cette dernière était découverte, elle conduirait nécessairement à la même relation entre les cercles et leurs rayons, et le choix des variables n'a d'autre effet que de conduire plus ou moins simplement au résultat. Mais il n'y a aucune règle précise à donner à ce sujet.

Des quantités incommensurables.

6. Deux quantités sont dites *incommensurables* entre elles, lorsqu'elles ne peuvent être partagées exactement en parties égales, respectivement de même grandeur; ou, en d'autres termes, lorsqu'elles n'ont pas de commune

mesure. Tant qu'on n'est pas obligé d'évaluer les quantités en nombres, il est indifférent qu'elles soient commensurables ou incommensurables; mais il n'en est plus ainsi dès que l'on a à considérer les rapports des quantités entre elles : et il est d'abord nécessaire de se faire une idée précise de ce que l'on appelle *nombre incommensurable*.

La pluralité nous donne la première idée du nombre; elle constitue ce que l'on appelle le *nombre entier*. Elle se trouve, soit dans la considération simultanée d'objets distincts et séparés, soit dans la décomposition d'une grandeur en parties égales. Dans ce dernier cas, le nombre est ce que l'on appelle le *rapport* de la grandeur décomposée à une grandeur égale à l'une de ses parties.

Mais si l'on avait à comparer deux grandeurs dont la plus petite ne fût pas contenue exactement dans l'autre, elles ne présenteraient plus l'idée du rapport tel qu'il vient d'être défini, et comme il est utile dans les sciences de généraliser le plus possible, c'est-à-dire de renfermer le plus grand nombre possible d'idées particulières sous une même dénomination, on a donné de l'extension à la signification des mots *nombre* et *rapport*. On a d'abord considéré le cas où les deux grandeurs ont une mesure commune; et, pour fixer les idées, supposons que cette mesure soit contenue m fois dans l'une et n fois dans l'autre : alors la plus grande est égale à m fois la $n^{ième}$ partie de la plus petite, et celle-ci à n fois la $m^{ième}$ partie de la plus grande.

Dans ce cas, on est convenu de dire que le rapport de la grande à la petite est $\frac{m}{n}$, et que celui de la petite à la grande est $\frac{n}{m}$. Ces deux rapports, auxquels donne tou-

jours lieu la comparaison de deux grandeurs inégales, sont dits *rapports* inverses ou *réciproques*.

Ces nouveaux rapports ont encore été appelés des nombres, et pour les distinguer des nombres entiers on les a désignés sous le nom de *nombres fractionnaires*. Enfin, si l'on considère deux grandeurs qui n'aient pas de mesure commune, elles ne présentent aucune des deux idées précédentes, et il faudra ou dire qu'elles n'ont pas de rapport, ou donner à la signification des mots *rapport* et *nombre* une nouvelle extension; alors les nombres croîtront d'une manière continue comme les quantités concrètes. Mais il ne suffit pas que l'on convienne de dire que deux grandeurs incommensurables ont entre elles un rapport, et que ce rapport sera désigné sous le nom de *nombre incommensurable;* il faut définir rigoureusement l'égalité des rapports, ou nombres, incommensurables. Notre manière de voir à cet égard, différente de celle de quelques géomètres, est entièrement conforme à celle d'Euclide.

Observons d'abord qu'en partageant l'une des grandeurs en parties égales suffisamment petites, et les portant dans l'autre autant de fois que possible, le reste sera moindre que l'une des parties, et par conséquent pourra toujours être rendu moindre que toute grandeur donnée; de sorte qu'il existera un rapport commensurable entre l'une quelconque des deux grandeurs, et une autre qui différera aussi peu qu'on voudra de la seconde.

Cela posé, considérons deux grandeurs incommensurables; divisons l'une d'elles, par exemple la plus petite, en parties égales dont le nombre croisse indéfiniment; portons-les dans la plus grande et négligeons le reste: il en résultera une suite de rapports ou de nombres commensurables correspondants à la plus petite des grandeurs et à d'autres grandeurs commensurables avec elle, et convergeant indéfiniment vers la seconde, qui en est

la *limite*, dans le sens que nous avons attaché à ce mot. Concevons, en second lieu, deux autres grandeurs incommensurables de même nature, mais d'une espèce quelconque, et partageons successivement la plus petite dans le même nombre de parties égales que la plus petite de la première espèce: on aura de même une nouvelle suite de rapports commensurables; et si ceux qui correspondent de part et d'autre au même mode de division de la plus petite sont toujours égaux, quelque loin qu'on pousse cette division, on dit que les deux premières grandeurs incommensurables ont le même rapport que les deux autres.

7. Mais pour qu'il y ait lieu de définir ainsi l'égalité des rapports incommensurables, il est nécessaire de démontrer que l'égalité des rapports commensurables respectifs est indépendante de la loi suivant laquelle les subdivisions décroissent indéfiniment; c'est-à-dire que si cette égalité a lieu pour une certaine loi, elle aura lieu pour toute autre. Cette proposition peut être démontrée comme il suit:

Soient A et B deux grandeurs incommensurables d'une espèce quelconque, et A', B' deux autres grandeurs incommensurables soit de la même espèce que les premières, soit de toute autre; admettons que si l'on subdivise A et A' en un même nombre de parties égales, qui croisse indéfiniment suivant une certaine loi déterminée, on trouve constamment le même nombre de ces parties contenues respectivement dans B et B': il s'agit de démontrer que si l'on partage A et A' en un même nombre quelconque m de parties égales, non renfermé dans la loi donnée, il se trouvera toujours un nombre égal de ces subdivisions respectives dans B et B'.

En effet, supposons qu'il y ait un nombre k de parties dans B, et un nombre différent par exemple, plus grand

dans B'. Alors K + 1 parties de la première espèce surpasseront B d'une certaine quantité, que je désignerai par E; tandis que K + 1 parties de la seconde seront encore inférieures à B'. Cela posé, décomposons A en parties égales moindres que E, et comprises dans la loi donnée; décomposons A' en un nombre égal de parties : d'après l'hypothèse, il devra s'en trouver respectivement le même nombre dans B et dans B'. Mais il est évident qu'il y aura moins de parties plus petites que E dans B que dans B+E, ou dans K+1 des subdivisions en question; et il y en aura autant dans ces K + 1 subdivisions, qu'il y aura de parties correspondantes dans les K + 1 subdivisions correspondantes de B', qui sont encore inférieures à B'. Donc il y aurait dans B un nombre moindre de parties comprises dans la loi donnée, qu'il n'y aurait de leurs correspondantes dans B'; ce qui est contre l'hypothèse. Il est donc impossible qu'en partageant A et A' en un même nombre de parties égales, ces parties ne soient pas respectivement comprises dans B et B' le même nombre entier de fois.

8. Il est bon de remarquer que l'on n'exprimerait rien qui fût réellement contradictoire avec notre définition en disant, avec beaucoup de géomètres, que le rapport de deux quantités incommensurables est la limite des rapports commensurables de l'une d'elles et d'une quantité variable ayant la seconde pour limite. Mais il n'est pas permis de donner cette définition des rapports incommensurables, parce qu'elle supposerait qu'il existe un nombre limite, tandis qu'au contraire il est certain qu'il n'en existe pas, si l'on ne donne pas de l'extension au sens du mot *nombre*.

9. Tout cela posé, lorsque nous dirons qu'une équation a lieu entre des nombres incommensurables, nous entendrons que cette équation a lieu entre des nombres com-

mensurables qui expriment des quantités variables, qui convergent vers des quantités fixes qui n'ont pas de commune mesure avec l'unité, et qui sont représentées par ces nombres incommensurables. D'où il résulte que la démonstration se fera comme si l'on regardait les nombres incommensurables comme limites de nombres commensurables, et rentre, quant à la forme, dans la méthode des limites.

10. On peut arriver à l'idée des nombres incommensurables autrement qu'en comparant deux grandeurs qui n'ont pas de mesure commune, et par des considérations purement arithmétiques, comme par exemple celle des racines, des logarithmes, etc. Dans ces cas, on trouve des nombres commensurables qui satisfont à des conditions de plus en plus voisines des proposées, et qui, en prenant une unité quelconque, représenteraient des quantités concrètes tendant vers des limites déterminées. Une équation entre ces nombres incommensurables sera toujours entendue dans le sens que nous avons expliqué précédemment.

De l'infini.

11. Le mot *infini* est employé pour exprimer l'absence de limite, de borne quelconque: c'est ainsi que l'espace et le temps sont dits infinis. Cette idée exclut évidemment celle de toute comparaison sous le rapport de la grandeur. Néanmoins, pour abréger le discours, on parle souvent de quantités infinies, on les soumet aux mêmes opérations que les quantités finies, et il est très-important de ne pas se méprendre sur la manière dont ce langage doit être entendu.

Ces quantités dites *infinies* ne peuvent se présenter que de deux manières : ou comme solutions, ou comme données d'une question.

L'infini peut se présenter comme solution lorsque,

pour déterminer certaines quantités, on les regarde comme dépendantes d'une autre; et que dans le cas particulier que l'on a en vue, cette dernière n'existe plus, tandis que pour des cas très-voisins elle aurait des valeurs qui pourraient dépasser toute grandeur assignée. Ainsi, par exemple, pour déterminer un angle, on peut, en général, prendre pour inconnue sa tangente trigonométrique; mais il faut excepter le cas particulier de l'angle droit. Les équations qui donneront la valeur de cette tangente devront conduire à une expression qui croîtra indéfiniment, à mesure que les données se rapprocheront de celles qui conduiraient pour solution à l'angle droit. Dans ce dernier cas, l'expression ne doit plus rien représenter, et apprendra par cela même que la question se rapporte à ce cas particulier. La forme qu'elle prendra alors est celle d'un nombre fini, divisé par zéro. On dit alors que la valeur de l'inconnue est infinie, et que l'angle correspondant est droit; de sorte que la question proposée est possible, et sa solution est déterminée. Mais si la quantité dont la valeur générale se présente dans un cas particulier sous la forme illusoire d'un nombre divisé par zéro n'est pas une inconnue auxiliaire, mais bien celle que l'on voulait déterminer, il est clair que la question proposée était absurde.

L'infini peut encore se présenter autrement que comme solution d'équations, dans des cas particuliers; il peut se trouver dans les données mêmes de la question. On peut se proposer de trouver la limite du rapport de la différence, ou de toute autre fonction de quantités dépendantes les unes des autres, et croissant sans limites. Dans tous les cas de ce genre, on dit quelquefois que cette limite est le rapport, ou la différence, ou la fonction quelconque de ces quantités infinies; mais il n'y aurait aucun sens à attribuer à la comparaison des deux infinis,

puisque, comme je l'ai déjà dit, l'infini ne signifie pas une grandeur, mais l'absence de limites : ainsi, si l'on mène dans un plan des parallèles équidistantes, il est absurde de dire que les espaces infinis renfermés entre les parallèles consécutives sont égaux. Mais si l'on cherche les rapports de ces espaces croissant indéfiniment, on peut bien se demander quelles sont leurs limites, et l'on trouve alors un résultat complétement indéterminé; car on peut faire croître indéfiniment les longueurs de deux de ces bandes en établissant entre elles une relation arbitraire; et l'on ne trouverait le rapport de ces *bandes infinies* égal à l'unité que dans des cas très-particuliers.

Rien ne serait plus facile, sans doute, que d'employer un langage entièrement exact pour exprimer ces idées, qui n'ont rien que de très-simple, et l'on éviterait ainsi l'inconvénient d'en laisser prendre souvent de fausses, qu'il est ensuite bien difficile de détruire. Le langage n'est pas d'ailleurs beaucoup simplifié, comme on le voit, par cette manière inexacte de rendre des idées très-claires par elles-mêmes; mais, comme elle est souvent employée, je n'ai pu me dispenser de préciser comment elle doit être entendue.

Des quantités infiniment petites. Comment elles s'introduisent dans le calcul.

12. Les quantités que l'on a pour objet de déterminer peuvent être considérées de diverses manières comme limites de quantités variables d'une espèce plus simple. Toutes ces manières se réduisent presque exclusivement aux trois suivantes :

1°. La quantité proposée peut être considérée comme limite d'une somme de quantités qui tendent indéfiniment vers zéro, et dont le nombre augmente indéfiniment; ou, encore, comme fonction de pareilles limites;

2°. On peut la considérer comme limite du rapport de deux quantités qui tendent simultanément vers zéro, ou comme fonction quelconque de limites de cette espèce et de la précédente;

3°. Enfin, on peut la considérer comme limite d'une somme de quantités invariables, dont le nombre augmente indéfiniment, et qui décroissent successivement en tendant vers la limite zéro.

Ce dernier point de vue se rapporte au développement en séries. Les deux autres constituent ce que l'on appelle le *calcul infinitésimal*, qui est l'objet principal que nous avons en vue.

13. *Toute quantité variable qui a pour limite zéro* se nomme une *quantité infiniment petite*, ou simplement un *infiniment petit*.

Les calculs relatifs à ces quantités peuvent être beaucoup simplifiés à l'aide des théorèmes suivants :

Premier théorème. — *La limite du rapport de deux quantités infiniment petites n'est pas changée quand on remplace ces quantités par d'autres, qui ne leur sont pas égales, mais dont les rapports avec elles ont respectivement pour limites l'unité.*

Soient, en effet, α et β deux quantités infiniment petites; α' et β' d'autres quantités, telles que les limites de $\frac{\alpha}{\alpha'}$ et de $\frac{\beta}{\beta'}$ soient égales à l'unité, et que, par suite, les limites des rapports inverses $\frac{\alpha'}{\alpha}$, $\frac{\beta'}{\beta}$ soient aussi égales à l'unité; on aura identiquement

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{\alpha'}.$$

Les limites de quantités égales étant égales, et la limite

d'un produit étant le produit des limites, on tirera de cette identité, en désignant les limites par l'abréviation *lim*,

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'};$$

ce qu'il fallait démontrer.

14. On peut énoncer le même théorème d'une autre manière, au moyen de la proposition suivante :

Lorsque la limite du rapport de deux quantités est l'unité, leur différence est infiniment petite par rapport à l'une quelconque des deux; c'est-à-dire que *le rapport de cette différence à l'une quelconque de ces quantités a pour limite zéro.*

Et réciproquement : *Si la différence de deux quantités est infiniment petite par rapport à l'une d'elles, la limite de leur rapport est l'unité.*

Soient, en effet, α et α' deux quantités quelconques, et δ leur différence; on aura $\alpha' = \alpha + \delta$, d'où $1 = \frac{\alpha}{\alpha'} + \frac{\delta}{\alpha'}$.

Donc, si la limite de $\frac{\alpha}{\alpha'}$ est l'unité, celle de $\frac{\delta}{\alpha'}$ est zéro, et réciproquement.

Si l'on avait divisé par α au lieu de α', on aurait prouvé que $\frac{\delta}{\alpha}$ a pour limite zéro; et d'ailleurs il est évident que δ étant la différence de α et α' est contenue dans le plus grand une fois de plus que dans l'autre, et que, par conséquent, les rapports $\frac{\delta}{\alpha}$, $\frac{\delta}{\alpha'}$ sont en même temps infiniment petits.

On pourra donc énoncer le premier théorème de cette autre manière :

La limite du rapport de deux infiniment petits n'est pas changée, quand on les remplace respectivement par

d'autres qui en diffèrent de quantités infiniment petites par rapport à eux.

Il est essentiel d'observer que pour que le rapport de deux infiniment petits ait une limite, il est nécessaire qu'ils dépendent l'un de l'autre, ou qu'ils soient tous deux dépendants d'une même variable : sans cela le rapport serait indéterminé, et par conséquent ne saurait avoir de limite déterminée.

Quoique nous ayons principalement en vue d'appliquer les propositions précédentes aux quantités infiniment petites, il n'est pas inutile d'observer qu'elles ont également lieu pour des quantités finies, et même pour des quantités indéfiniment croissantes. Les démonstrations que nous avons données sont indépendantes de l'ordre des grandeurs.

15. Deuxième théorème. — *La limite de la somme de quantités positives infiniment petites, dont le nombre augmente indéfiniment, n'est pas changée, quand on remplace ces quantités par d'autres dont les rapports avec elles ont respectivement pour limites l'unité.*

Soient, en effet, les infiniment petits

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m,$$

dont le nombre augmente indéfiniment, et

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_m$$

d'autres infiniment petits, tels que les rapports

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_3}{\beta_3}, \ldots, \frac{\alpha_m}{\beta_m}$$

aient tous pour limite l'unité.

La fraction

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \ldots + \alpha_m}{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \ldots + \beta_m}$$

sera intermédiaire entre la plus petite et la plus grande des

précédentes; elle aura donc, comme elles, l'unité pour limite. Donc les limites des sommes $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m$ et $\beta_1 + \beta_2 \ldots + \beta_m$ sont égales; ce qu'il fallait démontrer.

Si l'une des deux sommes était constante, la limite de l'autre serait égale à cette constante, puisque la limite de leur rapport est l'unité.

Il est inutile de dire que ce théorème, de même que le premier, peut être énoncé d'une seconde manière.

16. Le grand avantage que l'on retire de ces théorèmes consiste en ce qu'ils permettent souvent de négliger, dans les quantités infiniment petites, la partie qui en rend la comparaison et le calcul difficiles. Il suffit toujours que cette partie soit infiniment petite relativement à la quantité elle-même, et il n'en résulte aucune erreur dans les résultats où l'on n'a en vue que les limites des rapports ou des sommes de ces quantités infiniment petites.

Les infiniment petits que l'on considère presque uniquement sont les accroissements de quantités variables indépendantes, et des fonctions de ces variables. Les accroissements finis ou indéfiniment petits donnés à des variables se désignent souvent par le nom de *différences finies* ou *infiniment petites* de ces variables.

Quoique les quantités que l'on a en vue de calculer au moyen des infiniment petits soient ordinairement des limites de sommes ou de rapports, néanmoins il arrive quelquefois que ce soit un infiniment petit même que la question exige que l'on détermine, non en grandeur puisqu'il est variable, mais en signe : cette question se ramène, au reste, immédiatement à une limite de rapport.

Divers ordres d'infiniment petits.

17. Si l'on considère plusieurs infiniment petits, dépendants les uns des autres, de telle sorte que l'un étant

déterminé, tous les autres le soient, et que l'on en prenne un en particulier pour y rapporter tous les autres, on appellera infiniment petits du premier ordre ceux dont les rapports avec celui-là auront des limites finies; infiniment petits du second ordre ceux dont les rapports avec le même infiniment petit principal seront des infiniment petits du premier ordre; et en général infiniment petit de l'ordre n celui dont le rapport avec l'infiniment petit principal sera un infiniment petit de l'ordre $n - 1$.

Lorsque l'on veut exprimer seulement que le rapport d'un infiniment petit à un autre a pour limite zéro, on dit que le premier est infiniment petit par rapport au second.

Cela posé, il est très-facile d'exprimer, au moyen de l'infiniment petit principal, ceux de tous les ordres différents. En effet, désignons le premier par α, et par β un infiniment petit du premier ordre dont la limite du rapport avec α soit K; on aura

$$\frac{\beta}{\alpha} = K + \omega,$$

ω tendant vers zéro en même temps que α.

L'expression de tout infiniment petit du premier ordre sera donc de la forme

$$\alpha(K + \omega),$$

ω étant infiniment petit, et K fini.

Soit maintenant γ un infiniment petit du second ordre, le rapport $\frac{\gamma}{\alpha}$ devant être du premier ordre; on aura

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \alpha(K + \omega);$$

et, par conséquent, la forme de tout infiniment petit du second ordre sera

$$\alpha^2(K + \omega).$$

En continuant ainsi, il est facile de voir que la forme générale des infiniment petits de l'ordre n est

$$\alpha^n(K + \omega),$$

K étant fini, et ω infiniment petit.

Mais il y a souvent lieu de considérer des infiniment petits dont le rapport avec une puissance fractionnaire de α a une limite finie; et l'on est convenu d'appeler infiniment petit de l'ordre $\frac{p}{q}$ celui dont le rapport avec $\alpha^{\frac{p}{q}}$ a une limite finie: la formule qui représentera les quantités de cet ordre sera donc

$$\alpha^{\frac{p}{q}}(k + \omega).$$

C'est aussi dans le même sens qu'il faut entendre les ordres d'infiniment grands. Deux quantités de ce genre, c'est-à-dire croissant indéfiniment, sont dites du même ordre quand la limite de leur rapport est finie: l'une est infiniment petite par rapport à l'autre quand la limite de son rapport à cette autre est zéro; et l'on dira généralement que l'une d'elles est de l'ordre n relativement à l'autre, quand son rapport à la puissance $n^{ième}$ de l'autre aura une limite finie.

Rapports différentiels. Dérivées.

18. Les fonctions continues d'une seule variable jouissent de la propriété importante, que leurs accroissements infiniment petits sont, en général, du même ordre que les accroissements correspondants de la variable dont elles dépendent.

Pour s'en assurer, on observera d'abord que si le rapport de l'accroissement *unique et déterminé* de la fonc-

tion, à l'accroissement correspondant de la variable, ne tend pas vers une limite finie, il tendra vers zéro, ou croîtra sans limite; que si l'un ou l'autre de ces deux derniers cas n'a lieu que pour certaines valeurs particulières de la variable, le rapport a, en général, une limite finie, comme on voulait le démontrer; et que s'il en est autrement, il faudra que, dans une certaine étendue de la variable, le rapport tende vers zéro pour toute valeur de cette variable, ou croisse sans limite pour toutes ces mêmes valeurs: car on ne peut admettre que ces deux cas se succèdent sans intervalle; cela n'aurait aucun sens. Il reste donc à démontrer qu'il n'est pas possible que le rapport tende constamment vers zéro, ou croisse constamment sans limite entre deux valeurs déterminées de la variable. Et même on voit qu'il suffit d'examiner le premier cas, et que le second y est renfermé; car, si le rapport de deux quantités prises dans un certain ordre croît indéfiniment, le rapport des mêmes quantités, prises en ordre inverse, tendra vers zéro.

Il suffit donc de démontrer que lorsque deux variables x, y dépendent l'une de l'autre, le rapport de l'accroissement infiniment petit de y à celui de x ne peut avoir pour limite zéro, pour toutes les valeurs de x comprises entre deux valeurs déterminées a et b.

Supposons, en effet, qu'il en soit ainsi, et partageons une portion quelconque δ de l'intervalle $b-a$ en parties égales, dont nous désignerons la valeur par α, et que nous pourrons supposer aussi petites que nous le voudrons. Tous les rapports obtenus successivement en divisant par α les différences entre les valeurs consécutives de y, correspondantes à des valeurs de x qui diffèrent de α, seront aussi près de zéro que l'on voudra, d'après l'hypothèse. Si maintenant on ajoute, d'une part, les premiers termes de ces rapports, et, d'une autre, les seconds,

le rapport de ces deux sommes sera compris entre le plus petit et le plus grand des premiers, et par conséquent peut être démontré moindre que toute grandeur donnée.

Ainsi, la différence invariable des deux valeurs de y correspondantes aux deux valeurs déterminées de x, dont la différence est δ, est telle, que son rapport à δ peut être démontré plus petit que toute quantité donnée : il est donc nul, et par conséquent y serait constant pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b, et, par suite, ne serait pas fonction de x.

Donc, enfin, si y est fonction de x, la limite du rapport de l'accroissement de y à celui de x ne peut être constamment nulle entre deux valeurs déterminées de x. Il ne peut donc non plus être constamment infini, et par conséquent l'un ou l'autre de ces cas ne pourra arriver que pour des valeurs particulières de x.

Cette limite déterminée, dont la valeur change, en général, avec x pour la même fonction, est elle-même une fonction de x, que l'on appelle la *fonction dérivée*, ou simplement la *dérivée* de la première par rapport à x ; ou, encore, son *coefficient différentiel* par rapport à x. Nous lui donnerons aussi le nom de *rapport différentiel* de y à x.

19. Nous venons de démontrer que si la dérivée d'une quantité par rapport à x est nulle quel que soit x, cette quantité est nécessairement constante, ou, en d'autres termes, indépendante de x. Il suit de là que deux fonctions de x qui ont leur dérivée identique ne peuvent différer que d'une quantité ayant pour dérivée zéro, et par conséquent indépendante de x. D'où résulte cette proposition importante :

On connaîtra la fonction la plus générale ayant pour dérivée une fonction donnée, si l'on trouve une

fonction particulière qui satisfasse à cette condition, et qu'on lui ajoute une constante arbitraire.

20. On a trouvé commode de représenter des limites des rapports par des rapports exacts, et on a donné le nom de *différentielles* des variables à des quantités ayant entre elles des rapports égaux aux limites des rapports des accroissements ou différences de ces variables. Les différentielles ne sont donc pas entièrement déterminées; on peut prendre l'une d'elles arbitrairement: leurs rapports seuls sont déterminés.

La différentielle d'une fonction de x n'est donc autre chose que le produit de sa dérivée par rapport à x par la différentielle de x; et c'est se proposer le même problème, que de chercher la dérivée ou la différentielle d'une fonction d'une seule variable.

21. Nous ferons ici une remarque qui nous sera souvent utile. Soient x, y, z, u, v, etc., un nombre quelconque de variables, dépendantes d'une seule; a, b, c, d, e, etc., leurs accroissements correspondants, supposés infiniment petits; α, β, γ, δ, ε, etc., des quantités dont la première soit arbitraire, et toutes les autres choisies de manière que le rapport de deux consécutives quelconques soit égal à la limite du rapport des accroissements correspondants. Il s'ensuivra nécessairement que le rapport de deux quelconques de ces quantités, non consécutives, sera égal à la limite du rapport des accroissements correspondants: ainsi par exemple $\frac{\varepsilon}{\beta}$ sera la limite de $\frac{e}{b}$. En effet, en passant par les intermédiaires entre v et y, on posera l'identité

$$\frac{e}{b} = \frac{e}{d} \cdot \frac{d}{c} \cdot \frac{c}{b}.$$

Or le second membre a pour limite le produit des limites

de ses facteurs, c'est-à-dire $\frac{\varepsilon}{\delta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{6}$, ou $\frac{\varepsilon}{6}$. Le premier membre devant avoir la même limite, il s'ensuit, comme nous l'avions avancé, que $\frac{\varepsilon}{6}$ est la limite de $\frac{e}{b}$.

Notations diverses.

22. L'accroissement d'une variable s'exprime au moyen de la caractéristique Δ que l'on place devant cette variable. La différentielle s'exprime de même par la caractéristique d. Ainsi Δx, Δy, Δz, etc., sont les différences des variables x, y, z; et dx, dy, dz, etc., sont leurs différentielles.

La dérivée par rapport à x d'une fonction désignée par $\mathrm{F}(x)$ ou par y pourra donc être exprimée par $\frac{dy}{dx}$ ou $\frac{d\mathrm{F}(x)}{dx}$. C'est la notation de Leibnitz; et elle n'est autre chose que $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$, ou $\lim \frac{\Delta \mathrm{F}(x)}{\Delta x}$, lorsque Δx tend vers zéro. Dans le système de notations de Lagrange, on la représente par $\mathrm{F}'(x)$ ou y', en accentuant la fonction dont on veut exprimer la dérivée.

Lorsque Δx est infiniment petit, c'est-à-dire tend vers zéro, on a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \mathrm{F}'(x) + \alpha,$$

α étant infiniment petit, puisque $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ a pour limite $\mathrm{F}'(x)$; il en résulte

$$\Delta y = \mathrm{F}'(x)\,\Delta x + \alpha\Delta x.$$

Donc Δy ne diffère de $\mathrm{F}'(x)\,\Delta x$ que d'une quantité infiniment petite par rapport à Δy même. Si donc on prend la quantité arbitraire dx égale à Δx, les deux quantités Δy et dy ne différeront que d'une quantité infiniment pe-

tite par rapport à elles-mêmes, et pourront être substituées l'une à l'autre quand il ne s'agira que de limites de rapports ou de sommes. Ainsi dy pourra être pris pour la différence infiniment petite de y, correspondante à la différence infiniment petite dx; et c'est de là qu'est venue la dénomination de *différentielle*.

L'équation précédente démontre que Δy finit par être constamment de même signe que $F'(x)\,\Delta x$; donc Δy et Δx sont de même signe quand $F'(x)$ est positif, et de signes contraires quand $F'(x)$ est négatif; d'où se déduit cette importante proposition :

Une fonction varie dans le même sens que la variable dont elle dépend, lorsque sa dérivée est positive, et en sens contraire quand sa dérivée est négative.

23. La dérivée d'une fonction de x étant elle-même, en général, une fonction, on peut prendre sa dérivée, que l'on appelle la seconde dérivée de la première, et que l'on représente par $F''(x)$. La dérivée de cette nouvelle fonction est appelée la troisième dérivée de $F(x)$ et se représente par $F'''(x)$; et généralement la $n^{ième}$ dérivée sera désignée par $F^{n}(x)$.

On nomme *différentiation* l'opération qui a pour objet de trouver la différentielle d'une fonction, et *dérivation* celle qui a pour objet d'en trouver la dérivée : néanmoins la première expression s'emploie souvent pour désigner la seconde opération. Ces deux questions n'en font qu'une, comme nous l'avons dit précédemment.

Des fonctions simples, des fonctions de fonctions et des fonctions composées.

24. La manière dont une quantité peut dépendre d'une autre est susceptible d'une variété indéfinie. Parmi toutes les formes possibles de fonctions, on en a choisi un cer-

tain nombre très-limité, auxquelles on est convenu de chercher à ramener toutes les autres. Elles sont telles que, soit par les premières opérations de l'arithmétique, soit au moyen de Tables construites d'avance, on peut, avec un degré suffisant d'approximation, obtenir leurs valeurs correspondantes à des valeurs numériques quelconques de la variable dont elles dépendent.

Ces fonctions, que l'on désigne sous le nom de *fonctions simples*, sont les suivantes, dans lesquelles a désigne une quantité indépendante de la variable x :

$a+x$, $a-x$, ax, $\frac{a}{x}$, x^m (m étant un nombre réel quelconque), a^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tang} x$, $\cot x$, $\operatorname{séc} x$, $\operatorname{coséc} x$; et les fonctions inverses $\log x$, $\operatorname{arc}\sin x$, $\operatorname{arc}\cos x$, $\operatorname{arc}\operatorname{tang} x$, $\operatorname{arc}\cot x$, $\operatorname{arc}\operatorname{séc} x$, $\operatorname{arc}\operatorname{coséc} x$.

Une fonction quelconque de x peut être soumise aux opérations qui constituent une nouvelle fonction; on a alors une fonction d'une fonction de x. En la considérant elle-même comme une variable, on peut encore la soumettre aux opérations qui constituent une nouvelle fonction, et ainsi de suite. Les fonctions obtenues de cette manière se nomment, en général, des *fonctions de fonctions*.

Lorsqu'une fonction dépend de plusieurs fonctions de x, on la nomme une *fonction composée de* x, et c'est le cas le plus général des fonctions explicites.

25. Dans tous les cas, lorsque deux fonctions, renfermant un nombre quelconque de variables dépendantes d'une seule, sont toujours égales, quelque valeur qu'on donne à cette variable, il est clair que leurs accroissements correspondants sont toujours égaux, et que, par conséquent, leurs dérivées le sont aussi, ainsi que leurs différentielles.

D'où il résulte que, *quand une équation a lieu pour*

toute valeur de la variable indépendante, les dérivées ou les différentielles de ses deux membres sont égales, quelque valeur que l'on donne à cette variable.

Nous allons faire connaître les principes au moyen desquels la détermination des différentielles ou des dérivées de toutes ces fonctions se ramène à celle des différentielles ou des dérivées des fonctions simples.

Différentiation des fonctions de fonctions.

26. Considérons une fonction u de x, déterminée par la suite d'équations

$$u = F(z), \quad z = f(y), \quad y = \varphi(x),$$

et cherchons sa dérivée par rapport à x, ou la limite du rapport $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, dont les deux termes tendent vers zéro. Soient toujours

$$du, \; dz, \; dy, \; dx$$

des quantités telles, que le rapport de deux consécutives soit la limite du rapport des accroissements correspondants

$$\Delta u, \; \Delta z, \; \Delta y, \; \Delta x.$$

D'après ce que nous avons vu, dans le n° **21**, le rapport de deux quelconques des quantités dx, dy, etc., par exemple du et dx, sera la limite du rapport de leurs correspondantes Δu, Δx, et par conséquent la dérivée de u par rapport à x. Or on a identiquement

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Donc la dérivée de u par rapport à x est le produit des dérivées de u par rapport à z, de z par rapport à y, et de y par rapport à x

C'est en cela que consiste le principe de la différentiation des fonctions de fonctions. Il a lieu évidemment, quel que soit le nombre des fonctions accumulées; et il ramène à la simple différentiation de chacune de ces fonctions, considérée isolément.

Différentiation des fonctions inverses.

27. Il est très-facile de différentier la fonction inverse d'une fonction que l'on sait différentier. Soit proposée la fonction $F(x)$ dont l'inverse est $\varphi(x)$; cela signifie que si l'on pose

$$y = F(x),$$

on aura

$$x = \varphi(y).$$

Ces deux équations sont les mêmes sous une forme différente, et donneront les mêmes accroissements correspondants pour x et y. Soient dx, dy des quantités ayant pour rapport la limite du rapport des accroissements Δx, Δy; la dernière équation donnera

$$\frac{dx}{dy} = \varphi'(y),$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varphi'(y)},$$

c'est-à-dire

$$F'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} = \frac{1}{\varphi'[F(x)]};$$

d'où il résulte que, pour avoir la dérivée d'une fonction $F(x)$ inverse de la fonction $\varphi(x)$, il suffira de prendre la réciproque de la dérivée $\varphi'(x)$ et d'y remplacer x par la fonction proposée $F(x)$.

Expression de l'accroissement infiniment petit d'une fonction de plusieurs variables dépendantes ou indépendantes.

28. Considérons une fonction y qui dépende de deux variables u, v, et soit

$$y = F(u, v).$$

Si l'on donne à u et v des accroissements infiniment petits Δu, Δv dépendants ou indépendants l'un de l'autre, suivant que u et v le seront eux-mêmes, l'accroissement correspondant de y sera

$$\Delta y = F(u + \Delta u, v + \Delta v) - F(u, v)$$

et pourra se mettre sous la forme

$$\Delta y = F(u + \Delta u, v) - F(u, v) + F(u + \Delta u, v + \Delta v) - F(u + \Delta u, v).$$

Les deux premiers termes peuvent s'écrire ainsi :

$$\frac{F(u + \Delta u, v) - F(u, v)}{\Delta u} \Delta u.$$

Le coefficient de Δu ne diffère que d'une quantité infiniment petite, de la dérivée de $F(u, v)$ par rapport à u, v étant considéré comme constant. Soit $F_1(u, v)$ cette dérivée, que l'on appelle *dérivée partielle* de $F(u, v)$ ou de y par rapport à u; l'expression précédente pourra se mettre sous la forme

$$[F_1(u, v) + \alpha]\Delta u,$$

α désignant une quantité qui devient nulle avec Δu.

La seconde partie peut se mettre sous la forme

$$\frac{F(u + \Delta u, v + \Delta v) - F(u + \Delta u, v)}{\Delta v} \Delta v,$$

et le coefficient de Δv ne différera de la dérivée de $F(u+\Delta u, v)$ par rapport à v considéré comme seule variable, que d'une quantité β qui deviendra nulle avec Δv. Soit $F_2(u, v)$ la dérivée partielle de $F(u, v)$ par rapport à v; on pourra donc mettre la seconde partie de dy sous la forme

$$[F_2(u+\Delta u, v)+\beta]\Delta v.$$

Mais $F_2(u+\Delta u, v)$ ne diffère de $F_2(u, v)$ que d'une quantité qui deviendra nulle avec Δu; l'ajoutant avec β, et en désignant leur somme par α', la seconde partie de Δy aura pour valeur

$$[F_2(u, v)+\alpha']\Delta v;$$

et par conséquent, en réunissant les deux parties de Δy,

$$\Delta y=[F_1(u, v)+\alpha]\Delta u+[F_2(u, v)+\alpha']\Delta v.$$

Or $\alpha\Delta u$, étant infiniment petit par rapport à la première partie, l'est par rapport à Δy lui-même; et il en est de même de $\alpha'\Delta v$, soit que Δu et Δv soient dépendants ou indépendants l'un de l'autre. Donc, en désignant par ω une quantité infiniment petite par rapport à Δy, on aura

$$\Delta y=F_1(u, v)\Delta u+F_2(u, v)\Delta v+\omega.$$

On représente les dérivées partielles $F_1(u, v)$, $F_2(u, v)$ par $\frac{dF(u, v)}{du}$, $\frac{dF(u, v)}{dv}$, ou $\frac{dy}{du}$, $\frac{dy}{dv}$: mais il faut bien se rappeler que ces deux dy sont différents et représentent les différentielles de y relatives à la variation d'une seule des quantités u, v: on les nomme les différentielles partielles de y par rapport à u ou à v. Euler avait proposé d'écrire ainsi ces dérivées partielles : $\left(\frac{dy}{du}\right)$, $\left(\frac{dy}{dv}\right)$. On a supprimé, depuis, ces parenthèses, parce qu'avec un peu d'attention, toute méprise est impossible. L'équation précédente s'é-

crira alors de cette manière :

$$\Delta y = \frac{dy}{du}\Delta u + \frac{dy}{dv}\Delta v + \omega;$$

et il est bon de se rappeler que ω se compose d'abord d'une partie qui, divisée par Δu, devient encore nulle quand on y fait $\Delta u = 0$, et d'une autre partie qui, après avoir été divisée par Δv, contient des termes qui deviennent nuls, les uns quand on y fait $\Delta u = 0$, et les autres quand on y fait $\Delta v = 0$.

On aurait des résultats analogues pour un nombre quelconque de variables u, v, etc., soit entièrement indépendantes, soit dépendantes les unes des autres, ou d'autres variables quelconques.

Différentiation des fonctions composées.

29. Soient

$$y = F(u, v, w\ldots)$$

et

$$u = f(x), \quad v = \varphi(x), \quad w = \psi(x);\ldots$$

y sera alors une fonction composée, relativement à x.

Pour avoir sa dérivée, on remarquera que, d'après ce qui précède, on a, en supposant les accroissements infiniment petits,

$$\Delta y = \frac{dy}{du}\Delta u + \frac{dy}{dv}\Delta v + \frac{dy}{dw}\Delta w + \ldots + \omega,$$

ω étant infiniment petit par rapport à Δy, ou à une autre quelconque des différences.

Divisant par Δx et passant aux limites, on obtient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx} + \frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx} + \ldots,$$

expression dans laquelle il ne faut pas oublier que

$\frac{dy}{du}$, $\frac{dy}{dv}$, $\frac{dy}{dw}$ sont les dérivées partielles de la fonction y. Si x entrait explicitement dans $F(u, v, w...)$, par exemple si u n'était autre chose que x, $\frac{dy}{du}$ deviendrait $\frac{dy}{dx}$ et serait la dérivée partielle de la fonction par rapport à x; tandis que le $\frac{dy}{dx}$ du premier membre est la dérivée totale de la fonction dans laquelle on fait varier toutes les quantités dépendantes de x. On ne se méprendra jamais sur le sens de ces notations: c'était pour éviter toute crainte à ce sujet, qu'Euler avait proposé, comme nous l'avons dit, de mettre entre deux parenthèses les dérivées partielles; mais on a renoncé à cette précaution.

L'équation ci-dessus donne, en multipliant les deux membres par dx,

$$dy = \frac{dy}{du}du + \frac{dy}{dv}dv + \frac{dy}{dw}dw + \ldots.$$

On peut donc énoncer ainsi le principe de la différentiation des fonctions composées :

La différentielle d'une fonction composée est égale à la somme de ses différentielles partielles, relatives à chacune des variables qui y entrent explicitement.

Quant aux différentielles du, dv, etc., de ces dernières, elles se rapportent toutes à la différentielle dx de la variable unique dont elles dépendent.

30. *Théorème des fonctions homogènes.* — La différentiation des fonctions composées donne la démonstration d'un théorème remarquable sur les fonctions homogènes. On dit qu'une fonction de plusieurs variables est homogène et du degré m, lorsqu'en multipliant chaque variable par une indéterminée t, la fonction se trouve multipliée par t^m.

Cela posé, soient $u = F(x, y, z...)$ une fonction homogène du degré m, et $\varphi(x, y, z...)$, $\psi(x, y, z...)$ ses dérivées partielles par rapport à x, y, etc.; on aura, d'après la définition précédente,

$$(1) \qquad F(tx, ty, tz...) = t^m F(x, y, z).$$

Différentiant les deux membres par rapport à la variable t seulement, il vient

$$\varphi(tx, ty, tz...)x + \psi(tx, ty, tz...)y + ... = mt^{m-1}F(x, y, z);$$

faisant $t = 1$ dans cette identité, on aura la suivante :

$$(2) \qquad x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy} + z\frac{du}{dz} + ... = mu.$$

C'est en cela que consiste le théorème des fonctions homogènes.

On peut remarquer que si, dans l'identité (1), on suppose $t = \frac{1}{x}$, on obtient

$$\frac{F(x, y, z...)}{x^m} = F\left(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}...\right).$$

Ainsi une fonction homogène de degré m, divisée par la puissance m d'une des variables, ne dépend plus que des rapports des autres variables à la première.

Différentielle d'une somme, d'un produit, ou d'un quotient.

31. La règle précédente, appliquée à une somme de termes, montre que la différentielle d'une pareille fonction est la somme des différentielles de chacun de ses termes, ce qui était d'ailleurs évident de soi-même.

Si l'on suppose maintenant $y = uvw...$, la même règle donnera, en observant qu'en général $d[AF(x)] = AdF(x)$,

si A est un coefficient constant,

$$dy = vw\ldots du + uw\ldots dv + u.v\ldots dw + \ldots,$$

ou

$$dy = uvw\ldots\left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \ldots\right)\ldots$$

Soit encore $y = \frac{u}{v}$, d'où $vy = u$. En prenant les différentielles des deux membres, on aura

$$y\,dv + v\,dy = du,$$

d'où

$$dy = \frac{du}{v} - \frac{y\,dv}{v} = \frac{du}{v} - \frac{u\,dv}{v^2};$$

ce que l'on peut écrire ainsi :

$$dy = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

Comment la différentiation de toute fonction explicite se ramène à celle des fonctions simples.

32. Considérons maintenant une fonction explicite quelconque de x : elle indique une suite d'opérations à effectuer, dès que l'on aura choisi arbitrairement une valeur numérique pour x. Celle de ces opérations qui doit se faire la dernière, et dont le résultat est la valeur de la fonction, porte soit sur une seule, soit sur deux quantités variables avec x; dans ce dernier cas la différentielle de cette fonction se ramène, par le théorème des fonctions composées, au cas où une seule des deux quantités serait variable, et alors on n'a plus à considérer qu'une fonction simple. Si donc on savait trouver les différentielles de toutes les fonctions simples, on saurait trouver celle de la fonction proposée, au moyen des différentielles des quan-

tités sur lesquelles doit s'exécuter la dernière opération. La question est donc ramenée à déterminer ces différentielles, qui sont celles de fonctions moins compliquées que la proposée, et qui se ramèneront semblablement à d'autres fonctions encore moins compliquées, jusqu'à ce que l'on parvienne à des fonctions simples.

Tout se réduit donc à la différentiation de ces dernières, et c'est de quoi nous allons nous occuper présentement.

Différentiation des fonctions simples.

33. *Différentielle de $\log x$.* — Soit $y = \log x$; ce logarithme étant pris dans une base quelconque a, on aura

$$\Delta y = \log(x + \Delta x) - \log x = \log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right),$$

et, par suite,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

Posons $\frac{\Delta x}{x} = \alpha$, et substituons dans le second membre, il vient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log(1+\alpha)}{\alpha x} = \frac{1}{x}\log(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Or on sait que $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ tend vers la base e du système de Néper, lorsque α tend vers zéro (voir la note I à la fin). Donc la limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est $\frac{\log e}{x}$.

On peut donc écrire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log e}{x}, \quad \text{ou} \quad dy = \frac{\log e}{x}\,dx.$$

Si l'on observe que $\log e = \frac{1}{\mathrm{l}\,a}$, l désignant les logarithmes népériens, on pourra écrire

$$dy = \frac{dx}{x\,\mathrm{l}\,a},\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\,\mathrm{l}\,a};$$

si $a = e$, on aura $y = \mathrm{l}\,x$,

$$dy = \frac{dx}{x},\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Dans le cas où $a = 10$, le module $\log e$ a pour valeur $\log e = 0{,}4342945$.

34. *Différentielle de* a^x. — Soit maintenant la fonction inverse $y = a^x$. D'après la règle donnée en général pour les fonctions inverses, et dont on pourrait refaire la démonstration sur chaque cas particulier, on aura

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\log e} = \frac{a^x}{\log e} = a^x\,\mathrm{l}\,a,$$

et, par suite,

$$dy = a^x\,\mathrm{l}\,a\,dx.$$

On pourrait aussi trouver directement la différentielle de a^x, et en déduire celle de la fonction inverse $\log x$. En effet, si l'on a $y = a^x$, on aura

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x\,(a^{\Delta x} - 1);$$

d'où

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x\,\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Tout se réduit donc à trouver la limite de $\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$, ou, pour plus de commodité, de $\frac{a^\alpha - 1}{\alpha}$, α tendant vers zéro.

Posons

$$a^\alpha - 1 = 6,\quad \text{d'où}\quad a^\alpha = 1 + 6,$$

et, par suite,

$$\alpha \, \mathrm{l}\, a = \mathrm{l}(1+\beta);$$

d'où il résulte

$$\frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = \frac{\beta}{\mathrm{l}.(1+\beta)} \mathrm{l}\, a = \frac{\mathrm{l}\, a}{\mathrm{l}(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}}.$$

Or β tendant vers zéro, $(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}$ a pour limite e; donc

$$\lim \frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = \mathrm{l}\, a,$$

et, par conséquent,

$$\frac{dy}{dx} = a^x \, \mathrm{l}\, a, \quad \text{et} \quad dy = a^x \, \mathrm{l}\, a dx.$$

35. *Différentielle de x^m.* — Soit $y = x^m$; on aura, en prenant les logarithmes des deux membres dans la base e,

$$\mathrm{l}\, y = m \, \mathrm{l}\, x;$$

prenant maintenant les différentielles des deux membres, il vient

$$\frac{dy}{y} = m \frac{dx}{x}, \quad \text{d'où} \quad dy = \frac{my}{x} dx.$$

Remplaçant y par x^m, on aura, quel que soit m,

$$dy = mx^{m-1} dx, \quad \frac{dy}{dx} = mx^{m-1}.$$

Si y et x n'étaient pas positifs, les logarithmes seraient imaginaires; on évitera cette difficulté en élevant au carré les deux membres de l'équation $y = x^m$, ce qui donne

$$y^2 = (x^2)^m,$$

et, prenant les logarithmes,

$$\mathrm{l}\, y^2 = m \, \mathrm{l}\, x^2.$$

Différentiant les deux membres, il vient

$$\frac{d.(y^2)}{y^2} = m\frac{d.(x^2)}{x^2};$$

et comme on reconnaît facilement que l'on a

$$d.(y^2) = 2ydy, \quad d.(x^2) = 2xdx,$$

cette équation deviendra

$$\frac{dy}{y} = \frac{mdx}{x},$$

et, par suite,

$$dy = mx^{m-1}dx, \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = mx^{m-1},$$

comme dans le premier cas.

Dans le cas particulier de $m = -1$, on trouve

$$d.\frac{1}{x} = -\frac{dx}{x^2}.$$

Si $m = \frac{1}{2}$, on a

$$d.\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

36. On peut parvenir directement à la différentielle de x^m. Si l'on suppose d'abord m entier et positif, on aura, en désignant x^m par y,

$$\Delta y = mx^{m-1}\Delta x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}\Delta x^2 + \ldots;$$

divisant par Δx et passant à la limite, on obtient

$$dy = mx^{m-1}dx.$$

Soit maintenant $m = \frac{p}{q}$, p et q étant entiers et positifs, on aura

$$y = x^{\frac{p}{q}}, \quad \text{d'où} \quad y^q = x^p;$$

Différentiant les deux membres, il vient

$$qy^{q-1}\,dy = px^{p-1}\,dx;$$

d'où

$$dy = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{y^{q-1}}\,dx = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}\,dx = mx^{m-1}\,dx.$$

Cette formule étant vraie, quelque valeur commensurable qu'ait m, est encore vraie lorsqu'il est incommensurable.

Soit enfin $m = -n$, n étant un nombre quelconque positif, on aura

$$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}; \quad \text{d'où} \quad yx^n = 1.$$

Différentiant les deux membres, il vient, en appliquant au premier membre la règle des fonctions composées,

$$x^n\,dy + nx^{n-1}y\,dx = 0;$$

d'où

$$dy = -nx^{-n-1} = mx^{m-1}\,dx.$$

Ainsi, quelque valeur qu'ait m, la différentielle de x^m est, comme nous l'avions déjà trouvée, $mx^{m-1}\,dx$.

37. *Différentielles de* $\sin x$, $\tang x$, $\séc x$. — Les lignes trigonométriques étant des fonctions de l'arc correspondant (*voir*, dans les applications géométriques, l'article sur la longueur des lignes courbes), nous pouvons chercher l'expression de leurs différentielles correspondantes à celle de l'arc. Dans tous ces calculs nous supposerons que le rayon soit pris pour unité.

Soit d'abord

$$y = \sin x,$$

il en résultera

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) = \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

d'où

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Or, lorsqu'un arc tend vers zéro, le rapport du sinus à l'arc tend vers l'unité, ainsi que le rapport de la tangente à l'arc, ou du sinus à la tangente; donc

$$\lim \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1:$$

la limite du second membre est donc $\cos x$.

On a donc

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x;$$

on en déduit

$$dy = \cos x dx,$$

ou

$$d.\sin x = \cos x dx.$$

Soit maintenant $y = \operatorname{tang} x$; on aura

$$\Delta y = \frac{\operatorname{tang} x + \operatorname{tang} \Delta x}{1 - \operatorname{tang} x \operatorname{tang} \Delta x} - \operatorname{tang} x = \frac{\operatorname{tang} \Delta x (1 + \operatorname{tang}^2 x)}{1 - \operatorname{tang} x \operatorname{tang} \Delta x},$$

d'où

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{tang} \Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{1 + \operatorname{tang}^2 x}{1 - \operatorname{tang} x \operatorname{tang} \Delta x};$$

et passant aux limites,

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \operatorname{tang}^2 x = \operatorname{séc}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},$$

et, par suite,

$$dy = d.\operatorname{tang} x = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

On arriverait au même résultat en considérant que $\tang x$ égale $\frac{\sin x}{\cos x}$, et appliquant la règle pour différentier les fractions.

Soit enfin $y = \text{séc}\, x = \frac{1}{\cos x}$; on aura, par la règle des fractions,

$$dy = -\frac{d.\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x dx}{\cos^2 x} = \text{tang}\, x\ \text{séc}\, x dx:$$

ainsi $d\,\text{séc}\,x = \text{tang}\,x\ \text{séc}\,x dx$.

On y parviendra encore en observant que

$$\Delta y = \frac{1}{\cos(x+\Delta x)} - \frac{1}{\cos x},$$

et développant les calculs comme dans les cas précédents.

38. *Différentielles de* $\cos x$, $\cot x$, $\text{coséc}\, x$. — Considérons maintenant les mêmes fonctions du complément $\frac{\pi}{2} - x$ de l'arc x.

Observons pour cela que l'on aura en général, en regardant $\frac{\pi}{2} - x$ comme une fonction de x, et appliquant la règle des fonctions de fonctions,

$$d.\mathrm{F}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \mathrm{F}'\left(\frac{\pi}{2}-x\right) d\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\mathrm{F}'\left(\frac{\pi}{2}-x\right) dx.$$

Ainsi, pour les trois fonctions $\cos x$, $\cot x$, $\text{coséc}\, x$, qui ne sont autres que $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, $\text{tang}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, $\text{séc}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, il faudra prendre les dérivées des fonctions respectives $\sin x$, $\text{tang}\, x$, $\text{séc}\, x$, y changer x en $\frac{\pi}{2}-x$, puis multiplier

par $-dr$. On trouvera ainsi

$$d.\cos x = -\sin x dx, \quad d.\cot x = -\frac{dx}{\sin^2 x},$$

$$d.\operatorname{coséc} x = -\cot x \operatorname{coséc} x dx.$$

39. *Différentielles des fonctions trigonométriques inverses.* — Nous avons vu que, pour obtenir la dérivée d'une fonction y de x, il suffisait de diviser l'unité par la dérivée de la fonction inverse, dans laquelle on mettrait y pour variable.

D'après cela, si l'on considère les fonctions arc sin x, arc tang x, arc séc x, arc cos x, arc cot x, arc coséc x, qui ont respectivement pour inverses

$$\sin x, \quad \operatorname{tang} x, \quad \operatorname{séc} x, \quad \cos x, \quad \cot x, \quad \operatorname{coséc} x,$$

on trouvera :

pour $y = \operatorname{arc}\sin x$, $\quad dy = \dfrac{dx}{\cos y} = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

pour $y = \operatorname{arc}\operatorname{tang} x$, $\quad dy = \cos^2 y\, dx = \dfrac{dx}{1+x^2}$,

pour $y = \operatorname{arc}\operatorname{séc} x$, $\quad dy = \dfrac{dx}{\operatorname{tang} y \operatorname{séc} y} = \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$,

pour $y = \operatorname{arc}\cos x$, $\quad dy = -\dfrac{dx}{\sin y} = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

pour $y = \operatorname{arc}\cot x$, $\quad dy = -\sin^2 x\, dy = -\dfrac{dx}{1+x^2}$,

pour $y = \operatorname{arc}\operatorname{coséc} x$, $\quad dy = -\dfrac{dx}{\cot y \operatorname{coséc} y} = -\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Il faut bien remarquer que les radicaux qui se sont introduits dans ces formules doivent être pris, tantôt avec le signe $+$, tantôt avec le signe $-$; on reconnaîtra celui

que l'on doit prendre, en considérant la ligne trigonométrique qui l'a introduit.

Les trois dernières différentielles sont égales aux trois premières, en faisant abstraction des signes qui peuvent être semblables ou dissemblables ; et cela tient à ce que la somme ou la différence des deux arcs correspondants est une constante.

Les signes que nous avons donnés aux radicaux dans ces formules se rapportent au cas où l'arc est compris entre o et $\frac{\pi}{2}$.

Les différentielles des fonctions trigonométriques, ou *fonctions circulaires*, pourraient encore s'obtenir par des considérations géométriques fort simples, auxquelles nous ne nous arrêterons pas.

40. Le tableau suivant renferme les différentielles de toutes les fonctions simples. Nous y représentons par la lettre caractéristique L les logarithmes dans une base quelconque, et par l ceux qui se rapportent à la base de Néper. Dans les fonctions trigonométriques inverses, les signes des radicaux supposent l'arc compris entre o et $\frac{\pi}{2}$:

$d.x^n = nx^{n-1}dx$	$d.\sin x = \cos x dx$	$d \text{ arc} \sin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$d.\text{L}x = \text{L}e\,\frac{dx}{x}$	$d.\text{tang}\,x = \frac{dx}{\cos^2 x}$	$d.\text{arc tang}\,x = \frac{dx}{1+x^2}$
$d.\text{l}x = \frac{dx}{x}$	$d.\text{séc}\,x = \text{tang}\,x\,\text{séc}\,x dx$	$d.\text{arc séc}\,x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$
$d.a^x = a^x \text{l}a dx$	$d.\cos x = -\sin x dx$	$d.\text{arc} \cos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$d.e^x = e^x dx$	$d \cot x = -\frac{dx}{\sin^2 x}$	$d.\text{arc} \cot x = -\frac{dx}{1+x^2}$
	$d.\text{coséc}\,x = -\cot x\,\text{coséc}\,x dx$	$d.\text{arc coséc}\,x = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Il est bon d'observer que ces différentielles des fonc-

tions simples de x ne supposent nullement que x soit la variable indépendante. Elles correspondent bien à la différentielle dx; mais celle-ci peut dépendre de celle d'une variable quelconque dont x dépendrait, comme aussi elle peut être entièrement indépendante. Ainsi l'on aurait

$$d.[F(x)]^n = n[F(x)]^{n-1} d.F(x),$$

$$d.\sin[F(x)] = \cos[F(x)] d.F(x), \ldots.$$

C'est cette même considération qui nous a conduits à la différentiation des fonctions de fonctions.

41. *Problème inverse de la différentiation.* — Les formules précédentes permettent de résoudre dans quelques cas le problème inverse, qui consiste à remonter d'une dérivée ou d'une différentielle à la fonction qui l'a produite. Il suffit de se rappeler que deux fonctions qui ont la même différentielle ont pour différence une quantité dont la différentielle est nulle, et qui est, par conséquent, constante, c'est-à-dire indépendante des variables que l'on considère. On reconnaît ainsi que les fonctions les plus générales, ayant respectivement pour différentielles les expressions

$$x^m dx,\ \frac{dx}{x},\ a^x dx,\ \cos x dx,\ \sin x dx,\ \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}, \ldots,$$

sont, en désignant par C une quantité arbitraire indépendante de x,

$$\frac{x^{m+1}}{m+1} + C,\ 1x + C,\ \frac{a^x}{1a} + C,\quad \sin x + C,\quad \cos x + C,$$

$$\arcsin x + C,\quad \arccos x + C, \ldots;$$

et plus généralement, X désignant une fonction quelconque de x, les fonctions les plus générales ayant pour

différentielles les expressions suivantes :

$$X^m dX, \quad \frac{dX}{X}, \quad a^X dX, \quad \cos X dX, \quad \sin X dX,$$

$$\frac{dX}{\sqrt{1-X^2}}, \quad \frac{-dX}{\sqrt{1-X^2}}, \ldots,$$

sont les suivantes :

$$\frac{X^{m+1}}{m+1} + C, \quad lX + C, \quad \frac{a^X}{la} + C, \quad \sin X + C, \quad -\cos X + C,$$

$$\operatorname{arc} \sin X + C, \quad \operatorname{arc} \cos X + C, \ldots.$$

Il est inutile de dire que si les différentielles étaient multipliées par un facteur constant, il suffirait de multiplier par ce même facteur les fonctions correspondantes.

Différentielles des fonctions implicites.

42. Si par fonction implicite l'on entendait toute fonction dont la forme n'est point donnée explicitement, mais qui est déterminée complétement par les données de la question, on se jetterait dans une trop grande généralité, et il ne serait pas possible de donner des règles générales pour leur différentiation. Nous renfermerons seulement sous cette dénomination les fonctions qui sont liées aux variables dont elles dépendent, par des équations dont les deux membres sont des fonctions explicites de toutes ces quantités.

Nous considérerons d'abord le cas où l'on a une seule équation ; ce cas se subdivise en deux autres, suivant que la fonction dépend d'une seule ou de plusieurs variables indépendantes.

Soit d'abord la fonction y déterminée par l'équation

$$F(x, y) = 0.$$

Les dérivées, par rapport à x, des deux membres de cette équation, devant être identiques, et y étant une fonction déterminée, quoique inconnue de x, nous aurons, d'après la règle des fonctions composées,

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx}=0, \quad \text{ou} \quad \frac{dF}{dx}dx+\frac{dF}{dy}dy=0,$$

équation qui détermine la dérivée ou la différentielle de y, puisque l'on peut former les dérivées partielles $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$ de la fonction explicite $F(x, y)$. On aura ainsi

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}, \quad \text{d'où} \quad dy=-\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}dx.$$

Ces valeurs de la différentielle et de la dérivée de y sont exprimées au moyen de x et y à la fois; elles ne peuvent l'être au moyen de x seul, que quand on peut résoudre l'équation $F(x, y)=0$ par rapport à y; mais néanmoins ces formules ne laissent pas que d'être d'une grande utilité dans le cas même où cette résolution est impossible.

43. Considérons maintenant $m-1$ équations entre m variables; ce qui détermine $m-1$ d'entre elles en fonction de la $m^{ième}$, qui sera la seule variable indépendante. Soient

$$F(x, y, z,\ldots)=0,$$
$$F_1(x, y, z,\ldots)=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_{m-2}(x, y, z,\ldots)=0;$$

on trouvera, en différentiant toutes ces équations,

$$\begin{array}{l}
\frac{dF}{dx}dx \quad +\frac{dF}{dy}dy \quad +\frac{dF}{dz}dz \quad +\ldots=0,\\
\frac{dF_1}{dx}dx \quad +\frac{dF_1}{dy}dy \quad +\frac{dF_1}{dz}dz \quad +\ldots=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dF_{m-2}}{dx}dx+\frac{dF_{m-2}}{dy}dy+\frac{dF_{m-2}}{dz}dz+\ldots=0.
\end{array}$$

De ces $m-1$ équations du premier degré par rapport à dy, dz, etc., on tirera en général la valeur de ces $m-1$ inconnues en fonction de x, y, z,... et dx; ce qui était l'objet de la question. Si, pour certaines valeurs particulières de x, y, z, etc., tous les coefficients d'une de ces équations devenaient nuls, on la différentierait une ou plusieurs fois jusqu'à ce que les coefficients ne devinssent plus nuls. Les inconnues n'entreraient plus linéairement dans cette équation, mais elles n'en seraient pas moins déterminées; seulement il y aurait plusieurs systèmes de solutions.

Expression remarquable du rapport des accroissements finis de deux fonctions d'une même variable.

44. Soient $F(x)$, $f(x)$ deux fonctions quelconques, et x_0, X deux valeurs arbitraires de x, X surpassant x_0 d'une quantité finie positive h. Il s'agit de trouver, au moyen des dérivées de ces fonctions, une expression du rapport

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{f(x_0+h)-f(x_0)} \quad \text{ou} \quad \frac{F(X)-F(x_0)}{f(X)-f(x_0)},$$

en supposant que la fonction $f(x)$ soit toujours croissante ou toujours décroissante; ou, en d'autres termes, que sa dérivée soit constamment de même signe, pour

toutes les valeurs de x comprises entre x_0 et X. Admettons, pour fixer les idées, que $f'(x)$ soit constamment positive entre ces limites; et soient A, B la plus grande et la plus petite valeur que prend entre ces mêmes limites le rapport $\frac{F'(x)}{f'(x)}$; on aura constamment

$$\frac{F'(x)}{f'(x)} < A, \quad \frac{F'(x)}{f'(x)} > B.$$

Multipliant par $f'(x)$ qui est positif, on aura les deux inégalités suivantes, qu'il faudrait changer de sens si $f'(x)$ était négatif :

$$F'(x) - Af'(x) < 0, \quad F'(x) - Bf'(x) > 0.$$

Le premier membre de la première est la dérivée de $F(x) - Af(x)$, et par conséquent cette fonction est constamment décroissante depuis x_0 jusqu'à X, puisque sa dérivée est constamment négative dans cet intervalle. On aura donc

$$F(X) - Af(X) < F(x_0) + Af(x_0),$$

d'où

$$\frac{F(X) - F(x_0)}{f(X) - f(x_0)} < A.$$

La seconde inégalité conduit de même à

$$\frac{F(X) - F(x_0)}{f(X) - f(x_0)} > B.$$

Si donc le rapport $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ est continu entre x_0 et X, ce qui arrivera évidemment, par exemple, si $F'(x)$ et $f'(x)$ le sont séparément, il existera une certaine valeur de x intermédiaire entre x_0 et X, telle que ce rapport devien-

dra égal à $\frac{F(X)-F(x_0)}{f(X)-f(x_0)}$, qui est compris entre la plus grande et la plus petite valeur que prend $\frac{F'(x)}{f'(x)}$. Si l'on désigne cette valeur de x intermédiaire par $x_0+\theta h$, θ ayant une valeur comprise entre o et + 1, on parviendra à la formule suivante, dont nous ferons de nombreuses applications :

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{f(x_0+h)-f(x_0)}=\frac{F'(x_0+\theta h)}{f'(x_0+\theta h)}. \tag{1}$$

Si l'on avait supposé $f'(x)$ constamment négatif, les inégalités n'auraient fait que changer de sens, et n'en auraient pas moins conduit à cette même formule. Il faudra bien se rappeler, dans les applications de cette formule, qu'elle suppose que $f'(x)$ soit constamment de même signe entre x_0 et x_0+h, et que le rapport $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ passe par toutes les valeurs comprises entre sa plus grande et sa plus petite, quand x passe par toutes les valeurs comprises entre x_0 et x_0+h.

45. Nous allons déduire de l'équation (1) quelques propositions qui nous seront fort utiles par la suite.

Si l'on avait pour une valeur particulière x_0 de la variable, $F(x_0)=0$, $f(x_0)=0$, la formule (1) deviendrait, en posant $\theta h=h_1$, h_1 étant moindre que h,

$$\frac{F(x_0+h)}{f(x_0+h)}=\frac{F'(x_0+h_1)}{f'(x_0+h_1)}.$$

Si l'on avait, en outre, $F'(x_0)=0$, $f'(x_0)=0$, on aurait semblablement

$$\frac{F'(x_0+h_1)}{f'(x_0+h_1)}=\frac{F''(x_0+h_2)}{f''(x_0+h_2)},$$

h_2 étant moindre que h_1, et en supposant que $\frac{F''(x)}{f''(x)}$ passe par toutes les valeurs entre sa plus grande et sa plus petite; et, par suite,

$$\frac{F(x_0+h)}{f(x_0+h)} = \frac{F''(x_0+h_2)}{f''(x_0+h_2)}.$$

En continuant ainsi, on verra que si l'on a les conditions

$$F(x_0) = 0, \quad F'(x_0) = 0, \ldots, F^{n-1}(x) = 0,$$
$$f(x_0) = 0, \quad f'(x_0) = 0, \ldots, f^{n-1}(x_0) = 0,$$

et que les rapports des dérivées de même ordre, jusqu'à l'ordre n inclusivement, passent par toutes les valeurs entre leur plus grande et leur plus petite, ce qui aura lieu s'ils sont continus, on aura

$$(2) \qquad \frac{F(x_0+h)}{f(x_0+h)} = \frac{F^n(x_0+\theta h)}{f^n(x_0+\theta h)},$$

θ désignant une quantité positive moindre que l'unité. Si toutes les conditions précédentes étaient satisfaites, excepté $F(x_0) = 0$, on aurait

$$(3) \qquad \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{f(x_0+h)} = \frac{F^n(x_0+\theta h)}{f^n(x_0+\theta h)}.$$

46. Comme application de cette dernière formule, supposons que l'on ait

$$f(x) = (x - x_0)^n,$$

et que la fonction $F(x)$ ait toutes ses dérivées continues jusqu'à $F^n(x)$ inclusivement, entre x_0 et $x_0 + k$: les conditions $f(x_0) = 0$, $f'(x_0) = 0, \ldots, f^{n-1}(x_0) = 0$ seront évidemment satisfaites; et, en supposant toujours que

l'on ait

$$F'(x_0) = 0, \ldots, F^{n-1}(x_0) = 0,$$

l'équation (3) devient

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h^n} = \frac{F^n(x_0+\theta h)}{1.2.3\ldots n};$$

d'où

$$(4) \qquad F(x_0+h) - F(x_0) = \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} F^n(x_0+\theta h).$$

On voit que si l'accroissement h de x tendait vers zéro, et que $F^n(x_0)$ fût fini, l'accroissement de $F(x)$ serait infiniment petit de l'ordre n par rapport à celui de x, pour la valeur particulière x_0.

Si l'on a, en outre, $F(x_0) = 0$, la formule précédente devient

$$(5) \qquad F(x_0+h) = \frac{h^n}{1.2\ldots n} F^n(x_0+\theta h).$$

Si x_0 est zéro, cette équation se change en la suivante :

$$F(h) = \frac{h^n}{1.2\ldots n} F^n(\theta h),$$

et, changeant l'indéterminée h en x,

$$(6) \qquad F(x) = \frac{x^n}{1.2\ldots n} F^n(\theta x),$$

en admettant les conditions

$$F(0) = 0, \quad F'(0) = 0, \ldots, \quad F^{n-1}(0) = 0.$$

On peut remarquer qu'on aurait semblablement

$$F'(x) = \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^n(\theta_1 x),$$

et que par conséquent, dans ce cas, $F(x)$ *est infiniment petit par rapport à* $F'(x)$.

Si l'on n'avait pas $F(x_0) = 0$, on obtiendrait, au lieu de l'équation (6),

$$F(x) - F(0) = \frac{x^n}{1.2\ldots n} F^n(\theta x). \tag{7}$$

47. Nous déduirons de ce qui précède un corollaire très-simple, et qui nous servira par la suite. Il consiste en ce que si $\frac{F(x)}{x^{n-1}}$ tend vers zéro en même temps que x, et que $F(x)$, $F'(x)$,..., $F^n(x)$ soient continues entre o et x, la fraction $\frac{F(x)}{x^n}$ pourra se mettre sous la forme $\frac{F^n(\theta x)}{1\ 2\ldots n}$. En effet, il résulte d'abord de l'hypothèse, que l'on doit avoir

$$F(0) = 0, \quad F'(0) = 0, \ldots, \quad F^{n-1}(0) = 0;$$

car sans cela $\frac{F(x)}{x^{n-1}}$ serait infini, pour $x = 0$. On peut donc appliquer ici la formule (6), et l'on voit, par conséquent, que si $\frac{F(x)}{x^{n-1}}$ devient nul pour $x = 0$, on aura

$$\frac{F(x)}{x^n} = \frac{F^n(\theta x)}{1.2\ldots n}.$$

48. L'équation (4), dans laquelle on suppose $n = 1$, devient, en remplaçant par x la quantité arbitraire x_0,

$$F(x + h) - F(x) = hF'(x + \theta h). \tag{8}$$

Elle conduit immédiatement à une conséquence déjà obtenue précédemment, savoir : qu'*il n'y a qu'une expression indépendante de x, dont la dérivée par rapport à x soit nulle quel que soit x.*

En effet, soit $F(x)$ une fonction telle, que pour toute valeur de x on ait $F'(x) = 0$; l'équation désignée montre que, quels que soient x et $x + h$, on aura

$$F(x) - F(x + h) = 0,$$

puisque $F'(x + \theta h)$ est nul par hypothèse. Donc $F(x) = F(x + h)$, et par conséquent la fonction $F(x)$ a toujours la même valeur, quelle que soit la valeur de la variable; elle est donc constante relativement à x, ou, en d'autres termes, elle ne dépend pas de x.

De là résulte cette conséquence, que *deux fonctions qui ont la même dérivée par rapport à une même variable, ne peuvent différer que par une constante*, c'est-à-dire par une quantité indépendante de cette variable. En effet, la dérivée de la différence de ces deux fonctions, étant la différence de leurs dérivées, est nulle d'elle-même, d'après l'hypothèse; donc cette différence est une constante, comme il fallait le démontrer.

49. Nous terminerons par cette proposition très-importante, que si $F(x, y)$ est égal à zéro quel que soit x, quand on donne à y une certaine valeur particulière a, toutes les dérivées de $F(x, y)$ par rapport à x deviendront aussi nulles, quand on y fera $y = a$.

En effet, pour toute valeur de x et de h, on aura, en vertu de l'équation (8),

$$F(x + h, y) - F(x, y) = hF'(x + \theta h, y), \tag{9}$$

la dérivée étant prise par rapport à x.

Or les deux termes du premier membre deviennent nuls pour $y = a$; donc $F'(x + \theta h, a) = 0$.

Et comme x et h sont arbitraires, on peut affirmer que $x + \theta h$ peut prendre toutes les valeurs possibles, bien qu'on ne connaisse pas la valeur de θ; car $x + \theta h$ est toujours compris entre x et $x + h$, et l'on peut faire en

sorte que x et $x+h$ comprennent toujours entre eux une valeur arbitraire x' et s'en rapprochent indéfiniment; d'où il suit que $x+\theta h$ peut s'approcher indéfiniment de x', et que, par conséquent, $F'(x, a)$ est nul quel que soit x.

De là on déduira semblablement que $F''(x, a)$ est nulle quel que soit x, et qu'il en est de même en général de $F^n(x, a)$.

50. Il est encore utile de remarquer que si h tend vers zéro, et y vers a, le second membre de l'équation (9) sera infiniment petit par rapport à h, puisque $F'(x+\theta h, y)$ tendra vers zéro; donc *la différence infiniment petite relative à x, d'une fonction $F(x,y)$ qui est infiniment petite, quel que soit x, est infiniment petite par rapport à l'accroissement correspondant de x.*

Différentielles et différences d'un ordre quelconque de fonctions d'une seule variable.

51. La différentielle dy d'une fonction y de x, étant elle-même une fonction de x, aura aussi sa différentielle; et ce sera une quantité dont le rapport à la différentielle de x sera égal à la limite du rapport de l'accroissement infiniment petit de dy à l'accroissement correspondant de x. Pour plus de simplicité, on prendra pour la différentielle de x, dans cette nouvelle différentiation, la même valeur que dans la première; et, en général, on lui conservera toujours la même valeur pour toutes les différentiations que l'on aura à effectuer; c'est ce que l'on appelle prendre dx constant. Nous représenterons la différentielle de dy par ddy ou d^2y, et nous l'appellerons la différentielle seconde de y par rapport à x. De même d^2y aura une différentielle que l'on désignera par d^3y, et qui s'appellera la différentielle troisième de y; et ainsi de suite.

Il faut bien se garder de confondre ces indices de différentiation avec des exposants de puissance. Les puissances successives d'une différentielle dy s'écriraient de la manière suivante :

$$dy,\quad dy^2,\quad dy^3,\ldots,dy^n.$$

Rien n'est plus facile que d'exprimer les différentielles successives de la fonction $F(x)$ désignée par y, au moyen de ses dérivées.

En effet, on a d'abord

$$dy = F'(x)\,dx.$$

Or la différentielle de $F'(x)dx$ sera le produit de dx par sa dérivée par rapport à x, laquelle est $F''(x)\,dx$, puisque dx est indépendante de x. On aura donc

$$d^2y = F''(x)\,dx^2.$$

On aura de même

$$d^3y = F'''(x)\,dx^3,$$

et généralement

$$d^ny = F^{(n)}(x)\,dx^n,$$

ou

$$\frac{d^ny}{dx^n} = F^{(n)}(x);$$

de sorte que les dérivées successives d'une fonction de x peuvent être considérées comme les rapports des différentielles de même ordre de cette fonction aux puissances du même degré de dx.

52. Les différentielles successives d'une fonction ont avec les différences de cette fonction des rapports qu'il est essentiel de connaître.

La différence Δy de la fonction y étant elle-même une fonction de x, a aussi une différence; il en est de même de celle-ci, et ainsi de suite indéfiniment. Pour former ces différences successives de la fonction y, on suppose

que l'on donne constamment à x le même accroissement Δx, et on les désigne de la manière suivante :

$$\Delta y, \quad \Delta^2 y, \quad \Delta^3 y, \ldots \Delta^n y.$$

Les puissances de Δy seraient désignées comme il suit :

$$\Delta y, \quad \Delta y^2, \quad \Delta y^3, \ldots, \Delta y^n.$$

Or la proposition que nous allons démontrer consiste en ce que l'on a généralement, $\lim \frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} = \frac{d^n y}{dx^n}$.

En effet, on a d'abord

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = F'(x) + \omega,$$

ω devenant nul quel que soit x, quand on fait $\Delta x = 0$. Prenons maintenant les accroissements que subiront ces deux membres lorsque l'on augmentera encore x de Δx, et divisons-les par Δx; le premier donnera $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$. Quant au second, il suffira de prendre sa dérivée par rapport à x et d'y ajouter une quantité qui soit infiniment petite en même temps que Δx. Mais ω devenant nul avec Δx, quel que soit x, sa dérivée deviendra nulle en même temps, et par conséquent le second membre diffère de $F''(x)$ d'une quantité qui devient nulle avec Δx. En la désignant par ω_1, nous aurons

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = F''(x) + \omega_1;$$

en prenant encore les accroissements des deux membres de cette identité, relatifs à un nouvel accroissement Δx, et les divisant par Δx, on obtiendrait semblablement

$$\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} = F'''(x) + \omega_2,$$

et généralement

$$\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} = F^n(x) + \omega_{n-1},$$

ω_{n-1} devenant nul avec Δx.

On a donc, en passant aux limites,

$$\lim \frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} = F^n(x) = \frac{d^n y}{dx^n},$$

comme nous l'avions annoncé.

Il suit de là que si l'on fait tendre Δx vers zéro, en prenant $dx = \Delta x$, le rapport $\frac{\Delta^n y}{d^n y}$ aura pour limite l'unité, et *la différentielle de l'ordre n d'une fonction quelconque de x pourra être prise pour la différence du même ordre de cette fonction en négligeant une quantité infiniment petite par rapport à cette différence.*

Cette proposition est très-importante, en ce qu'elle permet de substituer les différentielles d'ordre quelconque aux différences infiniment petites de même ordre, dont l'expression serait beaucoup plus compliquée, et il n'en peut résulter aucune erreur dans les calculs où l'on ne considère que les limites des rapports ou des sommes.

53. *Remarque.* — Lorsque plusieurs fonctions, que l'on a à considérer dans une même question, dépendent toutes d'une seule variable x, les différences premières infiniment petites sont toutes déterminées par Δx, ou par une quelconque d'entre elles; ainsi Δy désignera partout le même accroissement, soit qu'on le détermine d'après Δz ou d'après la valeur correspondante de Δx, en supposant toujours que la valeur de x soit la même. Mais le $\Delta^2 y$ n'aura pas la même valeur quand il exprimera la différence de y par rapport à x ou par rapport à z. En effet, dans le premier cas il faut considérer les trois valeurs de y correspondantes à x, $x+\Delta x$, $x+2\Delta x$;

prendre la différence de la deuxième à la première, et de la troisième à la deuxième; puis la différence de ces deux différences. Dans le second cas, il faudra considérer les trois valeurs de y qui correspondent à z, $z+\Delta z$, $z+2\Delta z$, et agir de la même manière sur elles. Or les deux premières sont les mêmes dans les deux cas; mais la troisième est différente parce que à $x+2\Delta x$ ne correspond pas $z+2\Delta z$: il s'en faut d'une quantité infiniment petite par rapport à Δz, et que l'on n'a pas le droit de négliger par rapport aux différences du second ordre.

Il est donc nécessaire de distinguer avec soin les différences désignées par $\Delta^2 y$, dans les questions où l'on ne prendrait pas toujours la même variable indépendante. Il en serait de même des ordres supérieurs.

54. Si l'on considère en particulier les fonctions

$$x^m,\quad \log x,\quad a^x,\quad \sin x,\quad \cos x,$$

on trouvera

$$d^n x^m = m(m-1)\ldots(m-n+1)\,x^{m-n}dx^n,$$

$$d^n \log x = \pm\, 1.2.3\ldots(n-1)\log e\,\frac{dx^n}{x^n},$$

$$d^n a^x = a^x\, l^n a\, dx^n,$$

$$d^n \sin x = \sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)dx^n,$$

$$d^n \cos x = \cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)dx^n;$$

et il est bon de se rappeler que le second membre donne la valeur de la différence infiniment petite de l'ordre n, à une quantité près, infiniment petite par rapport à cette différence.

Différentielles, dérivées, et différences partielles des divers ordres, des fonctions de plusieurs variables indépendantes. Différences et différentielles totales.

55. Une fonction de deux variables indépendantes, x et y, peut être différentiée successivement par rapport à chacune d'elles partiellement, et l'on peut supposer que ces différentiations soient en nombre quelconque et se succèdent d'une manière quelconque. Le nombre de ces différentiations constitue l'*ordre* de la différentielle, de la différence ou de la dérivée. Il n'y a rien de nouveau à dire sur leur formation, puisque l'on n'a à considérer à chaque opération qu'une seule variable indépendante. Les dérivées partielles d'ordre quelconque s'exprimeront au moyen des différentielles correspondantes d'une manière entièrement semblable à celle que nous avons trouvée pour les fonctions d'une seule variable. Elles ont aussi les mêmes rapports avec les différences partielles correspondantes; et la reproduction identique des raisonnements déjà faits dans le cas où l'on considère toujours la même variable, conduit immédiatement à ces conséquences. Nous ne croyons cependant pas inutile de donner quelques développements à ce sujet.

Désignons généralement par $F^{m+n+p\ldots}_{x,y,x\ldots}(x, y)$ le résultat de m dérivations partielles effectuées par rapport à x sur la fonction $u = F(x, y)$, suivies de n dérivations partielles du résultat par rapport à y; lesquelles seront elles-mêmes suivies de p dérivations par rapport à x, et ainsi de suite.

Désignons de même par $d^{m+n+p\ldots}_{x,y,x\ldots} u$ le résultat obtenu en prenant d'abord la différentielle partielle de l'ordre m de u par rapport à x, puis la différentielle partielle de l'ordre n par rapport à y de l'expression obtenue, et ainsi

de suite. Et enfin représentons par $\Delta^{m+n+p\ldots}_{x,y,z\ldots}u$ le résultat obtenu en prenant d'une manière analogue les différences au lieu des différentielles. Cela posé, on aura d'abord, d'après ce que l'on a vu en traitant les fonctions d'une seule variable, et faisant usage des notations que nous venons d'indiquer,

$$d^m_x u = F^m_x(x, y)\,dx^m.$$

Considérant maintenant y comme la seule variable, et prenant la différentielle $n^{ième}$ des deux membres, on aura, de la même manière,

$$d^{m+n}_{x,y} u = F^{m+n}_{x,y}(x, y)\,dx^m dy^n;$$

prenant maintenant la différentielle partielle d'ordre p par rapport à x, et continuant ainsi indéfiniment, on obtiendra

$$d^{m+n+p\ldots}_{x,y,z\ldots} = F^{m+n+p\ldots}_{x,y,z\ldots}(x, y)\,dx^m dy^n dx^p\ldots,$$

ou

$$\frac{d^{m+n+p\ldots}_{x,y,z\ldots} u}{dx^m dy^n dx^p\ldots} = F^{m+n+p\ldots}_{x,y,z\ldots}(x, y).$$

Les dérivées partielles s'expriment donc au moyen des différentielles partielles correspondantes d'une manière analogue à celle qui se rapporte aux fonctions d'une seule variable.

56. Il y a encore évidemment le même rapport entre ces dérivées et ces différences partielles correspondantes. En effet, on aura d'abord, d'après ce qui a été démontré pour les fonctions d'une seule variable,

$$\frac{\Delta^m_x u}{\Delta x^m} = F^m_x(x, y) + \omega,$$

ω devenant nul en même temps que Δx. Prenons maintenant la différence $n^{ième}$ des deux membres par rapport à y, et divisons-la par Δy^n; il faudra, par les mêmes raisons, prendre la dérivée partielle $n^{ième}$ du second membre par rapport à y et y ajouter une quantité qui devienne nulle avec Δy. Si, de plus, on observe que ω devenant nul avec Δx, il en est de même de sa dérivée $n^{ième}$, on en conclura l'égalité suivante :

$$\frac{\Delta_{x,y}^{m+n} u}{\Delta x^m \Delta y^n} = \mathrm{F}_{x,y}^{m+n}(x, y) + \omega_1,$$

ω_1 devenant nul quand on suppose que Δx et Δy le deviennent tous les deux.

Prenant actuellement la différence d'ordre p des deux membres par rapport à x, la divisant par Δx^p, et continuant ainsi indéfiniment, on obtiendra la formule générale

$$\frac{\Delta_{x,y,x,\ldots}^{m+n+p\ldots} u}{\Delta x^m \Delta y^n \Delta x^p \ldots} = \mathrm{F}_{x,y,x,\ldots}^{m+n+p\ldots}(x, y) + \varepsilon,$$

ε devenant nul quand Δx et Δy le deviennent tous les deux.

D'où l'on conclut enfin, comme pour les fonctions d'une seule variable,

$$\lim \frac{\Delta_{x,y,\ldots}^{m+n+p\ldots} u}{\Delta x^m \Delta y^n \Delta x^p \ldots} = \mathrm{F}_{x,y,x,\ldots}^{m+n+p\ldots}(x, y) = \frac{d_{x,y,x,\ldots}^{m+n+p\ldots} u}{dx^m dy^n dx^p \ldots},$$

et il en serait de même pour un nombre quelconque de variables indépendantes.

Les notations que nous venons d'employer peuvent être simplifiées au moyen d'une proposition fondamentale que nous allons démontrer.

57. *De l'ordre dans lequel se succèdent les différen-*

tiations. — Si l'on prend les différences successives d'une fonction par rapport aux diverses variables indépendantes qu'elle renferme, on arrivera toujours au même résultat, dans quelque ordre qu'on effectue ces opérations, pourvu qu'on ne change pas le nombre de celles qui doivent être faites respectivement par rapport à chaque variable.

Soient, en effet, x et y deux des variables dont dépend une fonction u.

Si l'on change d'abord x en $x + \Delta x$, u devient

$$u + \Delta_x u;$$

si dans cette expression on change y en $y + \Delta y$, elle devient

$$u + \Delta_x u + \Delta_y u + \Delta^2_{x,y} u,$$

et l'on a ainsi ce que devient u quand x et y sont changés en $x + \Delta x$, $y + \Delta y$.

Or, en faisant les substitutions en sens inverse, on aura

$$u + \Delta_y u + \Delta_x u + \Delta^2_{y,x} u,$$

et ce résultat doit être identique au précédent, puisqu'il exprime toujours la fonction u dans laquelle x et y sont changés en $x + \Delta x$, $y + \Delta y$.

Donc on a identiquement

$$\Delta^2_{x,y} u = \Delta^2_{y,x} u.$$

Si maintenant on divise les deux membres par $\Delta x, \Delta y$ et qu'on passe aux limites, en faisant tendre Δx et Δy vers zéro, on en conclura, par ce qui précède,

$$F''_{x,y}(x, y) = F''_{y,x}(x, y),$$

et par conséquent

$$d^2_{x,y} u = d^2_{y,x} u.$$

Si l'on prend successivement un nombre quelconque de différences, de différentielles, ou de dérivées partielles,

il est facile de voir que l'ordre dans lequel on les prendra est complétement indifférent. En effet, deux de ces opérations successives pouvant être changées d'ordre, on pourra faire arriver au premier rang celle que l'on voudra, en la faisant avancer successivement d'un rang vers le commencement; on amènera ensuite au second rang celle que l'on voudra des autres, et enfin on les placera toutes dans un ordre quelconque, sans que le résultat cesse d'être identiquement le même.

D'après cela, on pourra supposer que toutes les différentiations par rapport à la même variable soient faites consécutivement, et les notations précédentes seront simplifiées, en ce qu'elles ne renfermeront qu'une seule indication pour chaque variable: et c'est ce que nous ferons dorénavant.

On simplifie encore l'expression des dérivées partielles en écrivant $\frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^n}$ au lieu de $\frac{d_{x,y}^{m+n}u}{dx^m dy^n}$, parce que les exposants de dx et de dy suffisent pour indiquer le nombre des différentiations effectuées par rapport à chacune des variables x et y.

Mais si, pour avoir la différentielle partielle correspondante, on faisait la multiplication par $dx^m dy^n$ en supprimant le dénominateur, on obtiendrait $d^{m+n}u$, expression qui ne renfermerait plus aucune trace des différentiations effectuées. On est donc obligé, pour que la notation ait un sens déterminé, de conserver le dénominateur, et d'écrire ainsi cette différentielle

$$\frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^n}\,dx^m dy^n.$$

Elle serait représentée beaucoup plus simplement par la notation, déjà employée, $d_{x,y}^{m+n}u$

Le système de notation de Lagrange s'applique aux fonctions de plusieurs variables; mais nous n'en parlerons pas, vu que les géomètres n'en font pas usage. La notation de Leibnitz a prévalu, parce qu'elle a surtout le grand avantage de mettre en évidence les différences infiniment petites, dont la considération est si utile dans toutes les recherches qui dépendent des mathématiques.

Différentielles totales des fonctions de variables indépendantes.

58. Soit $u = F(x, y)$, x et y étant indépendantes; nous avons vu précédemment que l'on avait

$$\Delta u = \frac{du}{dx}\Delta x + \frac{du}{dy}\Delta y + \omega,$$

ω étant infiniment petit par rapport à Δx, Δy, Δu, quand Δx et Δy tendent vers zéro.

La somme des deux premiers termes jouit donc, par rapport à l'accroissement total Δu, de cette propriété remarquable, d'être égale à la différence elle-même, à une quantité près infiniment petite par rapport à cette différence. D'après cela, l'analogie nous conduit à donner le nom de différentielle totale de u à l'expression suivante :

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy,$$

dx et dy étant des quantités indéterminées et indépendantes que nous nommerons les différentielles de x et y. Elle jouit de la propriété que, lorsque dx et dy seront considérés comme les accroissements infiniment petits donnés à x et y, elle pourra être prise pour l'accroissement total de u, en négligeant une quantité infiniment petite par rapport à cet accroissement; et, par conséquent,

on peut dire encore, comme dans le cas d'une seule variable indépendante, que les différentielles dx, dy, dz sont des quantités dont les rapports sont les limites des rapports des différences correspondantes Δx, Δy, Δz en prenant les différentielles des variables indépendantes égales à leurs différences.

Nous désignerons cette différentielle totale par du, et il faudra bien la distinguer des du partiels qui se trouvent dans le second membre, et sont différents l'un de l'autre. Pour éviter toute confusion, on devra se garder de supprimer les facteurs communs dx ou dy, et écrire

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy. \tag{1}$$

On peut encore écrire

$$du = d_x u + d_y u.$$

Ces considérations s'appliquent à un nombre quelconque de variables indépendantes, et *la différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables indépendantes sera toujours la somme de ses différentielles partielles relatives à chacune de ces variables.*

Cherchons maintenant l'expression des différentielles successives de u. Et pour cela remarquons d'abord que la différentielle de $\frac{d^{n+p}u}{dx^n dy^p}$ sera, par la règle qui vient d'être démontrée,

$$\frac{d^{n+p+1}u}{dx^{n+1}dy^p}dx + \frac{d^{n+p+1}u}{dx^n dy^{p+1}}dy;$$

elle se formerait donc en multipliant par $\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy$ l'expression proposée $\frac{d^{n+p}u}{dx^n dy^p}$, pourvu qu'on y considérât l'indice du numérateur comme un exposant, et qu'après la multiplication on changeât l'exposant des numérateurs

en indices de différentiation. D'après cela, si l'on part de la formule (1), la différentielle du second membre s'obtiendra en le multipliant par $\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy$, et faisant le changement des exposants en indices. Il en sera de même pour la différentielle de ce résultat; et, par conséquent, en désignant par $d^m u$ la différentielle totale de l'ordre m de u, on aura la formule symbolique

$$d^m u = \left(\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy\right)^m,$$

en entendant toujours que les exposants des du dans le second membre seront changés en indices de différentiations.

Comparons maintenant $d^m u$ à la différence totale $\Delta^m u$. Reprenons pour cela la formule

$$\Delta u = \frac{du}{dx}\Delta x + \frac{du}{dy}\Delta y + \omega,$$

dans laquelle nous supposons Δx et Δy infiniment petits, et donnons à x et y les mêmes accroissements Δx, Δy. L'accroissement de $\frac{du}{dx}$ calculé semblablement s'obtiendrait en multipliant $\frac{du}{dx}$ par $\frac{du}{dx}\Delta x + \frac{du}{dy}\Delta y$, et ajoutant une quantité infiniment petite par rapport à Δx et Δy; il en serait de même pour l'accroissement de $\frac{du}{dy}$. De sorte que l'accroissement de $\frac{du}{dx}\Delta x + \frac{du}{dy}\Delta y$ sera représenté symboliquement par le carré de cette expression, dans lequel on changera les exposants de du en indices, plus une quantité infiniment petite par rapport aux quantités Δx^2, $\Delta x\Delta y$, Δy^2. Or nous savons que ω se compose de termes qui ont en facteurs, les uns Δx, les autres Δy, et en outre d'autres facteurs qui devien-

nent nuls avec Δx, et Δy ainsi que leurs dérivées; d'où il suit que l'accroissement de ω sera infiniment petit par rapport aux mêmes quantités Δx^2, $\Delta x\Delta y$, Δy^2. On a donc la formule symbolique

$$\Delta^2 u = \left(\frac{du}{dx}\Delta x + \frac{du}{dy}\Delta y\right)^2 + \omega',$$

ω' étant infiniment petit par rapport aux quantités Δx^2, $\Delta x\Delta y$, Δy^2. En continuant ainsi on parviendrait sans difficulté, quel que fût le nombre des variables, à la formule symbolique générale

$$\Delta^m u = \left(\frac{du}{dx}\Delta x + \frac{du}{dy}\Delta y\right)^m + \omega,$$

ω étant infiniment petit par rapport au produit de m facteurs Δx ou Δy.

On a donc aussi cette autre proposition générale :

La différentielle totale de l'ordre m d'une fonction d'un nombre quelconque de variables indépendantes dans laquelle on prend dx, dy, etc., égaux aux accroissements infiniment petits de ces variables, ne diffère de la différence m^ième^ correspondante, que d'une quantité infiniment petite par rapport à elle-même.

59. *Remarque générale.* — Lorsque l'on cherchera une équation entre des différentielles d'ordre quelconque de fonctions quelconques, et que, pour y parvenir, il sera avantageux de considérer d'abord des différences infiniment petites, on pourra substituer les différentielles aux différences correspondantes, et négliger toute quantité infiniment petite par rapport à celles entre lesquelles on cherche la relation. Car si l'on divisait l'équation exacte par une des différences, élevée à une puissance convenable, et qu'on passât à la limite, les rapports des différences seraient remplacés par ceux des différentielles, et

l'on aurait l'équation même à laquelle on serait parvenu en négligeant des quantités nécessaires pour l'exactitude de l'équation entre les différences, mais qui disparaissent de l'équation exacte entre les différentielles, considérées comme des quantités infiniment petites ou finies.

Différentielles totales des divers ordres des fonctions de plusieurs variables dépendantes.

60. Si les variables x et y, qui entrent dans la fonction u, étaient elles-mêmes des fonctions de variables indépendantes, les différentielles totales de u changeraient toutes de forme, excepté celle du premier ordre, parce que les facteurs dx, dy ne seraient plus constants.

Ainsi, la différentielle première de u aurait toujours pour expression

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy.$$

Mais, en différentiant cette expression, il s'introduirait les termes

$$\frac{du}{dx}d^2x + \frac{du}{dy}d^2y,$$

et l'on formerait d^2x, d^2y en fonction des variables indépendantes et de leurs différentielles d'après les formules précédentes. On aurait ainsi

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy}dxdy + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2 + \frac{du}{dx}d^2x + \frac{du}{dy}d^2y,$$

et d^2u jouira, par rapport à Δ^2u, de la propriété qui a été démontrée indépendamment de la forme qui pourrait résulter de variables intermédiaires entre u et les variables indépendantes.

On trouverait de même les différentielles totales des ordres suivants, et pour un nombre quelconque de va-

riables, supposées dépendantes d'autres quelconques. Si parmi ces variables, les unes étaient dépendantes et les autres indépendantes, il suffirait de supposer nulles les différentielles de ces dernières qui passeraient le premier ordre.

61. *Cas particulier où x et y sont des fonctions linéaires.* — Si x et y étaient des fonctions linéaires des variables indépendantes, dx et dy seraient constants, quelles que fussent les valeurs des variables; on aurait donc

$$d^2x = 0, \quad d^2y = 0, \quad d^3x = 0, \ldots,$$

et, par conséquent, on retrouverait la formule symbolique

$$d^m u = \left(\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy\right)^m,$$

qui s'étendrait à un nombre quelconque de variables.

Différentielles des divers ordres des fonctions implicites.

62. Supposons d'abord la fonction implicite u dépendante des variables x, y, et déterminée par une équation unique

$$F(x, y, u) = 0;$$

nous aurons d'abord

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{du}du = 0,$$

d'où l'on tirerait du, comme nous l'avons déjà vu.

Différentiant encore cette équation par rapport à toutes les variables, et observant que du n'est pas constant, il vient

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2F}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2F}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2F}{du^2}du^2 + 2\frac{d^2F}{dxdy}dxdy\\ &+ 2\frac{d^2F}{dxdu}dxdu + 2\frac{d^2F}{dydu}dydu + \frac{dF}{du}d^2u = 0\end{aligned}\right\} = 0;$$

d'où l'on tirerait d^2u, et ainsi de suite. On agirait de la même manière pour un nombre quelconque de variables indépendantes. Si u ne dépendait que d'une variable x, cette équation se réduirait à

$$\frac{d^2F}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2F}{dxdu}dxdu + \frac{d^2F}{du^2}du^2 + \frac{dF}{du}d^2u = 0.$$

63. Si l'on avait deux équations, il y aurait deux variables, fonctions de toutes les autres; et, dans ce cas, on différentierait successivement chacune des équations, en distinguant bien les variables dépendantes des indépendantes : on déterminerait ainsi les différentielles secondes, troisièmes, etc., des deux fonctions ; et l'on agirait de la même manière dans le cas d'un nombre quelconque d'équations.

Soient, par exemple, les deux équations

$$F(x, y, u) = 0,$$
$$f(x, y, u) = 0;$$

y et u sont des fonctions de la variable indépendante x.

On aura d'abord les deux équations

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{du}du = 0,$$
$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{du}du = 0;$$

d'où l'on tirera dy et du. En différentiant ces deux équations, on obtiendra

$$\frac{d^2F}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2F}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2F}{du^2}du^2 + 2\frac{d^2F}{dxdy}dxdy + 2\frac{d^2F}{dxdu}dxdu$$
$$+ 2\frac{d^2F}{dydu}dydu + \frac{dF}{dy}d^2y + \frac{dF}{du}d^2u = 0,$$

$$\frac{d^2f}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2f}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2f}{du^2}du^2 + 2\frac{d^2f}{dxdy}dxdy + 2\frac{d^2f}{dxdu}dxdu$$
$$+ 2\frac{d^2f}{dydu}dydu + \frac{df}{dy}d^2y + \frac{df}{du}d^2u = 0,$$

d'où l'on tirerait d^2u et d^2y, puisque dy et du sont connus. On obtiendrait ainsi les différentielles de tous les ordres, de y et u.

Changement de variables.

64. *Cas d'une seule variable indépendante.* — Nous considérerons d'abord les fonctions d'une seule variable indépendante; et l'objet que nous allons nous proposer est d'exprimer toutes les dérivées d'une fonction y par rapport à une variable x dont elle dépend, au moyen des dérivées successives d'une autre fonction u par rapport à une variable t, regardée comme indépendante.

Toutes les quantités dépendent d'une seule variable : ainsi l'on a trois équations entre x, y, u, t; ou deux seulement, en laissant de côté celle qui exprimera la relation entre x et y. On voit qu'en vertu de ces trois équations, on peut considérer u comme une fonction de t, et ce sont les dérivées de u par rapport à t que l'on veut faire entrer dans des calculs où entreraient les dérivées de y par rapport à x.

Pour cela nous allons d'abord exprimer les dérivées de y par rapport à x, en fonction des dérivées de x et y par rapport à la même variable indépendante t dont elles seraient fonctions. Ces formules seront les mêmes, quelle que soit la forme particulière, tant de l'équation entre x et y que de celle qui doit lier x et y avec t. Nous montrerons ensuite comment les dérivées de x et y par rapport à t peuvent s'exprimer au moyen de celles que l'on veut introduire, qui sont celles de u par rapport à t. Ce dernier calcul dépend des équations qui lient x et y avec t et u, et peut-être encore avec d'autres variables; et le nombre des équations doit toujours être tel, qu'il n'y ait qu'une seule variable indépendante, comme nous l'avons supposé.

65. Pour exprimer les dérivées de y par rapport à x au moyen de celles de x et y par rapport à t, nous observerons que, d'après le principe des fonctions de fonctions, on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}, \quad \text{ou, puisque} \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Passons maintenant à l'expression de $\frac{d^2y}{dx^2}$. Nous différentierons pour cela les deux membres de cette équation par rapport à x; mais, afin de n'introduire dans le second membre que des dérivées par rapport à t, nous le différentierons d'abord par rapport à t, puis nous multiplierons par $\frac{dt}{dx}$, ou nous diviserons par $\frac{dx}{dt}$ Nous obtiendrons ainsi

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2}\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

De même, pour obtenir $\frac{d^3y}{dx^3}$, nous différentierons le second membre par rapport à t, puis nous diviserons par $\frac{dx}{dt}$. Et en continuant ainsi, il est clair que l'on aura l'expression de toutes les dérivées de y par rapport à x, au moyen de celles de x et y par rapport à une variable quelconque t, dont x et y seraient dépendants.

On peut, au lieu des dérivées de x et y par rapport à t, introduire leurs différentielles; il suffira de suppri-

mer le diviseur dt, et il viendra

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y\,dx - d^2x\,dy}{dx^3}.$$

Ces premières formules se rapportent au *changement de la variable indépendante* seulement.

66. Si l'on suppose que la variable t soit la fonction y elle-même, on aura les dérivées de y par rapport à x, exprimées au moyen de celles de x par rapport à y, quelle que soit d'ailleurs la relation entre x et y. Ces formules seront

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}, \ldots$$

67. Considérons maintenant le cas général où l'on aurait entre m variables $x, y, \ldots, u, t$, les $m-2$ équations

$$F(x, y, \ldots, u, t) = 0,$$
$$f(x, y, \ldots, u, t) = 0,$$

sans compter l'équation qui donne y en fonction de x. Si l'on différentie ces $m-2$ équations par rapport à t, on pourra exprimer $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ en fonction de $\frac{du}{dt}$, par la résolution d'équations du premier degré.

Différentiant de nouveau ces équations, on introduira les dérivées secondes par rapport à t, et il y restera des dérivées premières que l'on pourra remplacer par leurs valeurs tirées des premières équations. On pourra donc encore, par la résolution d'équations du premier degré, tirer les valeurs de $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ au moyen de $\frac{d^2u}{dt^2}$ et $\frac{du}{dt}$.

En continuant ainsi, toutes les dérivées de x et de y par rapport à t seront exprimées au moyen de celles de u

par rapport à t; et comme nous avons donné les formules générales qui expriment $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., au moyen de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, etc., $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, etc., il s'ensuit que l'on connaîtra $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$,... au moyen de $\frac{du}{dt}$, $\frac{d^2u}{dt^2}$,..., ce qui était l'objet de la question.

68. Si, au lieu d'équations finies, on avait des équations différentielles, il faudrait toujours chercher à en déduire $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, etc., $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, etc., au moyen de $\frac{du}{dt}$, $\frac{d^2u}{dt^2}$, etc., et l'on agirait ensuite comme dans le cas précédent.

Supposons, par exemple, l'équation

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 1,$$

et proposons-nous d'exprimer $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, au moyen de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, etc. La question se réduit ici à exprimer $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, etc., au moyen de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, etc.

Or on aura d'abord

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{1 - \frac{dx^2}{dt^2}}.$$

Pour avoir $\frac{d^2y}{dt^2}$, on différentiera l'équation donnée, et il viendra

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

d'où

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\frac{dy}{dt}} = -\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\sqrt{1-\frac{dx^2}{dt^2}}}.$$

Une nouvelle différentiation ferait connaître $\frac{d^3y}{dt^3}$, et ainsi de suite.

Ce cas est celui où l'on déterminera une courbe par une équation entre l'arc et l'abscisse.

69. *Cas de plusieurs variables indépendantes.* — Considérons maintenant une fonction z de deux variables indépendantes x, y. Sa forme n'est pas connue, et l'on ne doit pas avoir besoin d'en faire usage; mais on doit toujours raisonner dans l'hypothèse qu'elle existe.

La question que nous nous proposons est de déterminer les dérivées partielles de tous les ordres, de z par rapport à x et y, au moyen de celles d'une autre fonction r par rapport à deux autres variables indépendantes φ et θ, en supposant qu'il existe trois équations entre $x, y, z, r, \varphi, \theta$, savoir,

$$(1) \quad \begin{cases} F(x, y, z, \theta, \varphi, r) = 0, \quad F_1(x, y, z, \theta, \varphi, r) = 0, \\ F_2(x, y, z, \theta, \varphi, r) = 0, \end{cases}$$

de sorte que quatre quelconques de ces six variables peuvent être regardées comme fonctions des deux autres qui seront entièrement arbitraires.

Cela posé, différentions successivement r par rapport à chacune des variables x et y, la seconde étant supposée constante; et considérons r comme dépendant de θ et φ, qui eux-mêmes dépendent de x et y. Nous aurons ainsi

$$(2) \qquad \frac{dr}{dx} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dx} + \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx}, \quad \frac{dr}{dy} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dy} + \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dy}.$$

Il faut maintenant éliminer de ces équations les dérivées $\frac{d\theta}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{dr}{dx}$, $\frac{d\theta}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{dr}{dy}$, et pour cela nous différentierons d'abord les équations (1) par rapport à x; d'où

$$\frac{dF}{d\theta}\frac{d\theta}{dx}+\frac{dF}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx}+\frac{dF}{dr}\frac{dr}{dx}+\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx}=0,$$

$$\frac{dF_1}{d\theta}\frac{d\theta}{dx}+\frac{dF_1}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx}+\frac{dF_1}{dr}\frac{dr}{dx}+\frac{dF_1}{dx}+\frac{dF_1}{dz}\frac{dz}{dx}=0,$$

$$\frac{dF_2}{d\theta}\frac{d\theta}{dx}+\frac{dF_2}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx}+\frac{dF_2}{dr}\frac{dr}{dx}+\frac{dF_2}{dx}+\frac{dF_2}{dz}\frac{dz}{dx}=0;$$

d'où nous tirerons $\frac{d\theta}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{dr}{dx}$ en fonction de $\frac{dz}{dx}$: et les reportant dans la première équation (2), nous en tirerons immédiatement $\frac{dz}{dx}$ en fonction de $\frac{dr}{d\theta}$, $\frac{dr}{d\varphi}$.

Différentiant de même les équations (1) par rapport à y, et faisant usage de la seconde équation (2), on obtiendra $\frac{dz}{dy}$ au moyen de $\frac{dr}{d\theta}$, $\frac{dr}{d\varphi}$: ce qui était l'objet que l'on s'était proposé.

On conclurait facilement de là $\frac{dr}{d\theta}$, $\frac{dr}{d\varphi}$ au moyen de $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, par la résolution de deux équations du premier degré; mais on pourrait d'ailleurs les obtenir directement en suivant une marche inverse.

On passera aux dérivées partielles du second ordre en différentiant $\frac{dr}{dx}$, $\frac{dr}{dy}$ par rapport à x et y : on sera ramené à différentier $\frac{dr}{d\theta}$, $\frac{dr}{d\varphi}$ par rapport à x et y, et on les traitera comme on a traité r, ce qui introduira les dérivées du second ordre de r par rapport à θ et φ.

On aura en outre à différentier $\frac{d\theta}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\theta}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, ce qui introduira les dérivées partielles du second ordre de z par rapport à x et y, dont on aura ainsi les valeurs.

Il est facile de voir que cette méthode s'applique à un nombre quelconque de variables indépendantes, et s'étend aux dérivées de tous les ordres.

70. Nous examinerons, en particulier, le cas d'une fonction u de trois variables indépendantes x, y, z, qui doivent être remplacées par trois autres variables indépendantes r, φ, θ, liées à x, y, z par trois équations connues; dans ce cas, il s'agira d'exprimer toujours les dérivées partielles de u par rapport à x, y, z, au moyen de ses dérivées partielles par rapport à r, φ, θ. Ce problème renferme celui de la transformation des coordonnées dans des équations aux différentielles partielles où la variable principale est une fonction de trois coordonnées.

Considérons u comme fonction de θ, φ, r, et ces dernières comme fonctions de x, y, z; et différentions u partiellement par rapport à x, y, z, nous aurons

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{du}{dx}&=\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dx}+\frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx}+\frac{du}{dr}\frac{dr}{dx},\\ \frac{du}{dy}&=\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dy}+\frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dy}+\frac{du}{dr}\frac{dr}{dy},\\ \frac{du}{dz}&=\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dz}+\frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dz}+\frac{du}{dr}\frac{dr}{dz}. \end{aligned}\right.$$

Or, au moyen des trois équations entre x, y, z, θ, φ, r, on peut déterminer les dérivées partielles

$$\frac{d\theta}{dx},\quad \frac{d\theta}{dy},\quad \frac{d\theta}{dz},\quad \frac{d\varphi}{dx},\quad \frac{d\varphi}{dy},\quad \frac{d\varphi}{dz},\quad \frac{dr}{dx},\quad \frac{dr}{dy},\quad \frac{dr}{dz},$$

et, par conséquent, les équations (3) donnent les valeurs des dérivées partielles de la fonction u par rapport à

x, y, z, au moyen de celles de la même fonction par rapport à θ, φ, r.

La résolution de ces trois équations ferait connaître $\frac{du}{d\theta}$, $\frac{du}{d\varphi}$, $\frac{du}{dr}$ au moyen de $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$; mais on pourrait les trouver directement par une marche inverse de la précédente.

En différentiant les équations (3) successivement par rapport à x, y, z, on exprimerait les dérivées du second ordre par rapport aux variables indépendantes d'un des systèmes, au moyen des dérivées du second ordre par rapport aux variables de l'autre; et l'on continuerait ainsi indéfiniment.

Ainsi, par exemple, en différentiant $\frac{du}{dx}$ par rapport à x, on serait ramené à former les dérivées partielles de $\frac{du}{d\theta}$, $\frac{du}{d\varphi}$, $\frac{du}{dr}$ par rapport à x, et c'est ce que l'on ferait en traitant $\frac{du}{d\theta}$, $\frac{du}{d\varphi}$, $\frac{du}{dr}$, comme on avait d'abord traité u, ce qui introduirait les dérivées du second ordre de u par rapport à θ, φ, r, tout le reste étant connu.

71. Appliquons ce procédé à une transformation qui se présente souvent dans les questions de mécanique et de physique mathématique.

Soient x, y, z les coordonnées rectangles d'un point, et r, θ, ψ ses coordonnées polaires, de sorte qu'on ait entre ces six variables les trois équations

$$z = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta\sin\psi, \quad x = r\sin\theta\cos\psi,$$

on trouvera, au moyen de la méthode que nous venons d'exposer,

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dr}\sin\theta\cos\psi + \frac{du}{d\theta}\frac{\cos\theta\cos\psi}{r} - \frac{du}{d\psi}\frac{\sin\psi}{r\sin\theta},$$

$$\frac{du}{dy}=\frac{du}{dr}\sin\theta\sin\psi+\frac{du}{d\theta}\frac{\cos\theta\sin\psi}{r}+\frac{du}{d\psi}\frac{\cos\psi}{r\sin\theta},$$

$$\frac{du}{dz}=\frac{du}{dr}\cos\theta-\frac{du}{d\theta}\frac{\sin\theta}{r},$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{dx\,dy}&=\frac{d^2u}{dr^2}\sin^2\theta\sin\psi\cos\psi+\frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{\cos^2\theta\sin\psi\cos\psi}{r^2}-\frac{d^2u}{d\psi^2}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r^2\sin^2\theta}\\&+2\frac{d^2u}{d\theta dr}\frac{\sin\theta\cos\theta\sin\psi\cos\psi}{r}+\frac{d^2u}{d\psi dr}\left(\frac{\cos^2\psi-\sin^2\psi}{r}\right)\\&+\frac{d^2u}{d\psi d\theta}\frac{(\cos^2\psi-\sin^2\psi)\cos\theta}{r^2\sin\theta}-\frac{du}{dr}\frac{\sin^2\theta\sin\psi\cos\psi}{r}\\&-\frac{du}{d\theta}\frac{\cos\theta\sin\psi\cos\psi}{r^2}\left(2\sin\theta+\frac{1}{\sin\theta}\right)+\frac{du}{d\psi}\left(\frac{\sin^2\psi-\cos^2\psi}{r^2\sin^2\theta}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{dx\,dz}&=\frac{d^2u}{dr^2}\sin\theta\cos\theta\cos\psi-\frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{\sin\theta\cos\theta\cos\psi}{r^2}\\&+\frac{d^2u}{d\theta dr}\frac{(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\cos\psi}{r}-\frac{d^2u}{d\psi dr}\frac{\sin\psi\cos\theta}{r\sin\theta}+\frac{d^2u}{d\theta d\psi}\frac{\sin\psi}{r^2}\\&+\frac{du}{d\theta}\frac{(\sin^2\theta-\cos^2\theta)\cos\psi}{r^2}-\frac{du}{dr}\frac{\sin\theta\cos\theta\cos\psi}{r},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{dy\,dz}&=\frac{d^2u}{dr^2}\sin\theta\cos\theta\sin\psi-\frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{\sin\theta\cos\theta\sin\psi}{r^2}\\&+\frac{d^2u}{d\theta dr}\frac{(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\sin\psi}{r}+\frac{d^2u}{d\psi dr}\frac{\cos\psi\cos\theta}{r\sin\theta}-\frac{d^2u}{d\theta d\psi}\frac{\cos\psi}{r^2}\\&+\frac{du}{d\theta}\frac{(\sin^2\theta-\cos^2\theta)\sin\psi}{r^2}-\frac{du}{dr}\frac{\sin\theta\cos\theta\sin\psi}{r},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{dx^2}&=\frac{d^2u}{dr^2}\sin^2\theta\cos^2\psi+\frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{\cos^2\theta\cos^2\psi}{r^2}+\frac{d^2u}{d\psi^2}\frac{\sin^2\psi}{r^2\sin^2\theta}\\&+2\frac{d^2u}{d\theta dr}\frac{\sin\theta\cos\theta\cos^2\psi}{r}-2\frac{d^2u}{d\psi dr}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r}\\&-2\frac{d^2u}{d\theta d\psi}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r^2\tang\theta}+\frac{du}{dr}\frac{\cos^2\theta\cos^2\psi+\sin^2\psi}{r}\\&+\frac{du}{d\theta}\cos\theta\left(\frac{\sin^2\psi-2\sin^2\theta\cos^2\psi}{r^2\sin\theta}\right)+2\frac{du}{d\psi}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r^2\sin^2\theta},\end{aligned}$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d^2u}{dr^2}\sin^2\theta\sin^2\psi + \frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{\cos^2\theta\sin^2\psi}{r^2} + \frac{d^2u}{d\psi^2}\frac{\cos^2\psi}{r^2\sin^2\theta}$$

$$+ 2\frac{d^2u}{d\theta dr}\frac{\sin\theta\cos\theta\sin^2\psi}{r} + 2\frac{d^2u}{d\psi dr}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r}$$

$$+ 2\frac{d^2u}{d\theta d\psi}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r^2\,\mathrm{tang}\,\theta} + \frac{du}{dr}\left(\frac{\cos^2\theta\sin^2\psi + \cos^2\psi}{r}\right)$$

$$+ \frac{du}{d\theta}\cos\theta\left(\frac{\cos^2\psi - 2\sin^2\theta\sin^2\psi}{r^2\sin\theta}\right) - 2\frac{du}{d\psi}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r^2\sin^2\theta},$$

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{d^2u}{dr^2}\cos^2\theta + \frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{\sin^2\theta}{r^2} - 2\frac{d^2u}{d\theta dr}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} + \frac{du}{dr}\frac{\sin^2\theta}{r}$$

$$+ 2\frac{du}{d\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}.$$

APPLICATIONS ANALYTIQUES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

72. *Détermination des valeurs particulières des fonctions qui se présentent sous les formes* $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty \times 0$, 1^∞, ∞^0, 0^0. Lorsqu'une fonction est le quotient de deux autres fonctions de x, et qu'une valeur particulière de x rend ces deux dernières nulles ou infinies, la valeur de la première se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, et, dans ce cas, on peut se proposer de déterminer la valeur vers laquelle converge la fraction donnée, lorsque x tend vers cette valeur particulière; c'est cette valeur limite, que l'on désigne souvent sous le nom de *vraie valeur* de la fraction, qui se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Cherchons d'abord la limite de $\frac{F(x)}{f(x)}$ lorsque x tend vers une valeur x_0 telle que l'on ait $F(x_0) = 0$, $f(x_0) = 0$. Soit h une quantité tendant vers zéro, on aura, d'après le n° (45),

$$\frac{F(x_0 + h)}{f(x_0 + h)} = \frac{F'(x_0 + \theta h)}{f'(x_0 + \theta h)};$$

donc

$$\lim \frac{F(x)}{f(x)} = \lim \frac{F'(x)}{f'(x)}$$

lorsque x tend vers x_0 ; et, par conséquent, si $F'(x_0)$ et $f'(x_0)$ ne sont ni nuls ni infinis, la limite cherchée sera $\frac{F'(x_0)}{f'(x_0)}$.

Si l'on avait encore $F'(x_0) = 0$, $f'(x_0) = 0$, la limite de $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ serait la même que celle de $\frac{F''(x)}{f''(x)}$, et ainsi de suite.

Si donc toutes les dérivées, jusqu'à l'ordre n exclusivement, deviennent nulles pour $x = x_0$, la limite cherchée sera celle de $\frac{F^n(x)}{f^n(x)}$; et si $F^n(x_0)$ et $f^n(x_0)$ ne sont ni nulles ni infinies, on aura, pour valeur de cette limite,

$$\frac{F^n(x_0)}{f^n(x_0)}.$$

Si l'une de ces dernières dérivées est encore nulle, la limite sera o si c'est $F^n(x_0)$ qui est nulle, et la fonction croîtra sans limite si c'est $f^n(x_0)$.

73. Supposons maintenant $F(x_0) = \infty$, $f(x_0) = \infty$, d'où $\frac{1}{F(x_0)} = 0$, $\frac{1}{f(x_0)} = 0$; on aura identiquement

$$\frac{F(x_0+h)}{f(x_0+h)} = \frac{\frac{1}{f(x_0+h)}}{\frac{1}{F(x_0+h)}} = \frac{\frac{f'(x_0+\theta h)}{f(x_0+\theta h)^2}}{\frac{F'(x_0+\theta h)}{F(x_0+\theta h)^2}}.$$

d'où, en représentant $\frac{F(x_0+h)}{f(x_0+h)}$ par $\varphi(h)$,

$$\frac{F'(x_0+\theta h)}{f'(x_0+\theta h)} = \frac{\varphi(\theta h)^2}{\varphi(h)} = \varphi(\theta h)\frac{\varphi(\theta h)}{\varphi(h)}.$$

Or, si $\frac{F(x)}{f(x)}$, ou $\varphi(h)$, a une limite finie, $\varphi(\theta h)$ aura la

même limite, et $\frac{\varphi(\theta h)}{\varphi(h)}$ tendra vers l'unité; on aura donc

$$\lim \frac{F(x)}{f(x)} = \lim \frac{F'(x)}{f'(x)}.$$

Si, au contraire, l'expression $\frac{F(x)}{f(x)}$ tend vers o ou ∞, elle finira, en général, par varier constamment dans le même sens, à mesure que x tendra vers x_0; et le facteur $\frac{\varphi(\theta h)}{\varphi(h)}$ sera, dans le premier cas, plus petit, et, dans le second, plus grand que l'unité. Donc $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ devient nul ou infini en même temps que $\frac{F(x)}{f(x)}$, et par conséquent, dans tous les cas, la recherche de la vraie valeur de $\frac{F(x)}{f(x)}$ se ramène à celle de $\frac{F'(x)}{f'(x)}$.

Si donc $F'(x_0)$ et $f'(x_0)$ ne sont ni nuls ni infinis, la limite cherchée sera

$$\frac{F'(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Si les dérivées de $F(x)$, $f(x)$ devenaient infinies jusqu'à un certain ordre, on agirait comme dans le cas précédent. Mais si elles deviennent toutes infinies, cette méthode ne sera plus applicable; et ce qu'il y a souvent de mieux à faire dans ce cas, c'est de remplacer x par $x_0 + h$ et d'effectuer les réductions.

Ainsi soit, par exemple, la fraction

$$\frac{\sqrt[3]{x - x_0}}{\sqrt{x^2 - x_0^2}};$$

ses deux termes deviennent nuls pour $x = x_0$, et toutes les

dérivées deviennent infinies. Mais si l'on pose $x = x_0 + h$, elle devient

$$\frac{\sqrt[3]{h}}{\sqrt[4]{h(2x_0 + h)}} \quad \text{ou} \quad \frac{h^{\frac{1}{3}}}{h^{\frac{1}{4}}(2x_0 + h)^{\frac{1}{4}}};$$

supprimant le facteur commun $h^{\frac{1}{4}}$, il reste $\dfrac{h^{\frac{1}{12}}}{(2x_0 + h)^{\frac{1}{4}}}$, dont la limite est zéro quand h tend vers zéro.

74. La valeur x_0 étant arbitraire peut être supposée aussi grande que l'on voudra, et, par conséquent, les règles précédentes s'appliquent au cas où l'on a $x_0 = \infty$. Mais la démonstration directe ne pourrait plus se faire de la même manière dans ce cas, et il est bon de l'examiner à part.

Si l'on pose $x = \frac{1}{y}$, on aura

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F\left(\frac{1}{y}\right)}{f\left(\frac{1}{y}\right)};$$

y tendant vers zéro, il n'y aura aucune difficulté, et l'on aura, par la démonstration précédente,

$$\lim \frac{F\left(\frac{1}{y}\right)}{f\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim \frac{F'\left(\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2}}{f'\left(\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2}} = \lim \frac{F'\left(\frac{1}{y}\right)}{f'\left(\frac{1}{y}\right)}.$$

On aura donc aussi

$$\lim \frac{F(x)}{f(x)} = \lim \frac{F'(x)}{f'(x)},$$

x croissant indéfiniment.

75. Considérons maintenant le produit

$$F(x)f(x),$$

et supposons

$$F(x_0) = \infty, \quad f(x_0) = 0;$$

nous aurons identiquement

$$F(x)f(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{F(x)}},$$

ce qui ramène au premier cas; et l'on trouve alors

$$\lim F(x)f(x) = -\lim \frac{F(x)^2 f'(x)}{F'(x)}.$$

Si la seconde expression rentre dans un des cas examinés, on la traitera par les procédés déjà indiqués.

76. On peut encore donner une autre règle pour trouver la limite de la fraction

$$\frac{F(x)}{x},$$

dans laquelle on suppose x infini.

En effet, h étant une quantité finie quelconque, on a, quel que soit x,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x + \theta h);$$

faisant croître x indéfiniment, le second membre tend vers $F'(\infty)$, qui est la limite de la fraction $\frac{F(x)}{x}$, d'après une des règles précédentes. Donc

$$\lim \frac{F(x)}{x} = \lim \frac{F(x+h) - F(x)}{h};$$

et si, pour plus de simplicité, on fait $h = 1$,

$$\lim \frac{F(x)}{x} = \lim [F(x+1) - F(x)].$$

Ce théorème a été démontré d'une autre manière par M. Cauchy, dans son *Cours d'Analyse algébrique*.

77. Considérons maintenant une expression de la forme

$$F(x)^{f(x)};$$

son logarithme est

$$f(x) \log F(x),$$

et rentre dans une expression que nous avons examinée. Si donc on peut déterminer par les règles précédentes la vraie valeur de ce logarithme, dans le cas singulier où les fonctions $\log F(x)$ et $f(x)$ seraient l'une infinie et l'autre nulle, on en conclura immédiatement celle de l'expression proposée.

Examinons en particulier l'expression

$$F(x)^{\frac{1}{x}},$$

dans le cas de $x = \infty$, et supposant $F(\infty) = \infty$. Le logarithme de cette expression est

$$\frac{\log F(x)}{x},$$

et sa limite est celle de $\frac{F'(x)}{F(x)}$, que l'on peut traiter par les règles précédentes.

Mais si l'on applique à $\frac{\log F(x)}{x}$ la règle particulière du n° 76, on trouvera que sa limite est la même que celle de

$$\log F(x+1) - \log F(x), \quad \text{ou} \quad \log \frac{F(x+1)}{F(x)}.$$

Donc la limite de $F(x)^{\frac{1}{x}}$ est la même que celle de $\frac{F(x+1)}{F(x)}$ quand x devient infini. Cette règle avait encore été démontrée par M. Cauchy.

78. L'application de ces diverses règles conduit à quelques résultats particuliers qui méritent d'être remarqués:

$$\frac{a^x}{x} = \infty \text{ pour } x = \infty \text{ si l'on a } a > 1,$$

$$\frac{\log x}{x} = 0 \text{ pour } x = \infty,$$

$$x \log x = 0 \text{ pour } x = 0,$$

$$xe^{\frac{1}{x}} = \infty \text{ pour } x = 0,$$

$$x^{\frac{1}{x}} = 1 \text{ pour } x = \infty,$$

$$(Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + U)^{\frac{1}{x}} = x = 1 \text{ pour } \infty$$

$$x^x = 1 \text{ pour } x = 0,$$

$$(\cos mx)^{\frac{1}{x}} = 1 \text{ pour } x = 0,$$

$$(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \text{ pour } x = 0.$$

Série de Taylor pour les fonctions d'une seule variable.

79. La série que nous allons faire connaître a pour objet de développer une fonction quelconque de la somme $x + h$ suivant les puissances entières et positives de l'une des parties, par exemple de h; elle a été découverte par Taylor, et a conservé le nom de son inventeur. Maclaurin en a déduit une autre qui donne le développement d'une fonction suivant les puissances de la variable, et qui a été employée avant lui par Stirling. Il suffit, en effet, de faire $x = 0$ dans la première pour obtenir le développement d'une fonction de la variable h suivant les puissances de h. Cette série de Maclaurin n'est donc qu'un

cas particulier de celle de Taylor, et c'est pour cela qu'on la désigne ordinairement sous le même nom.

Soit $F(x+h)$ la fonction qu'il s'agit de développer suivant les puissances entières et positives de h.

Commençons par écrire un nombre quelconque n des termes déduits suivant la même loi que si la fonction était entière et rationnelle, et désignons par $f(h)$ la fonction de x et de h, qui, ajoutée à ces termes, reproduit $F(x+h)$: nous aurons

$$F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{1.2}F''(x) + \ldots$$
$$+ \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{(n-1)}(x) + f(h).$$

Les dérivées des deux membres par rapport à h étant nécessairement identiques, on reconnaît sans peine que $f(h)$ et ses $(n-1)$ premières dérivées deviennent nulles pour $(h=0)$, et que

$$f^{(n)}(h) = F^{(n)}(x+h).$$

Donc, d'après une formule démontrée précédemment, on aura

$$f(h) = \frac{h^n}{1.2\ldots n}F^n(x+\theta h),$$

et, par suite,

$$(J)\ \begin{cases} F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \dfrac{h^2}{1.2}F''(x) + \ldots \\ + \dfrac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{n-1}(x) + \dfrac{h^n}{1.2\ldots n}F^n(x+\theta h). \end{cases}$$

Cette formule donne la solution de la question, et montre dans quel cas elle est possible. En effet, si l'expression

$$\frac{h^n}{1.2\ldots n}F^n(x+\theta h)$$

tend vers zéro à mesure que n augmente, $F(x+h)$ est la limite de la série

$$F(x) + hF'(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^{n-1}(x) + \ldots,$$

et l'on peut poser la formule suivante, qui est celle de Taylor :

$$(2) \quad \begin{cases} F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \dfrac{h^2}{1.2} F''(x) + \ldots \\ + \dfrac{h^n}{1.2\ldots n} F^n(x) + \ldots. \end{cases}$$

Mais il faut bien faire attention que, d'après la formule sur laquelle est fondée cette série, elle ne peut être substituée à $F(x+h)$ que lorsque $F(x)$ et toutes ses dérivées sont continues entre x et $x+h$, et que $\dfrac{h^n}{1.2\ldots n} F^n(x+\theta h)$ tend vers zéro quand n croît indéfiniment.

La fonction $F(x+h)$ ne peut être développée suivant les puissances de h autrement que par la formule (2) ; car deux séries convergentes ordonnées suivant les puissances entières et positives d'une même variable, et dont les sommes sont égales, quelle que soit la valeur de cette variable, sont les mêmes, terme pour terme.

80. Il est facile de reconnaître que le terme

$$\frac{h^n}{1.2\ldots n} F^n(x+\theta h),$$

qui donne la valeur exacte du reste de la série, après les n premiers termes, tend vers zéro toutes les fois que $F^n(x)$ reste fini, lorsque n augmente indéfiniment : et pour cela il suffit de faire voir que $\dfrac{h^n}{1.2\ldots n}$ tend vers zéro quel que soit h. En effet, quand n aura dépassé la valeur de h, et qu'on l'augmentera indéfiniment, l'expres-

sion $\frac{h^n}{1.2\ldots n}$ sera multipliée par les fractions $\frac{h}{n+1}$, $\frac{h}{n+2}$,..., qui diminuent de plus en plus. Mais quand même elles resteraient égales à la première, qui est plus petite que l'unité, on sait que le produit aurait pour limite zéro. Donc il en est de même de $\frac{h^n}{1.2\ldots n}$ quand n croîtra indéfiniment; et la série de Taylor peut être employée lorsque $F(x)$ et toutes ses dérivées sont continues et finies entre x et $x+h$.

81. La formule (1) a l'avantage de donner des limites de l'erreur commise en s'arrêtant à un terme quelconque de la série de Taylor. En effet, si l'on prend les n premiers termes, la quantité exacte qu'il faudrait y ajouter pour obtenir $F(x+h)$ est $\frac{h^n}{1.2\ldots n}F^n(x+\theta h)$. Si donc on désigne par A et B la plus petite et la plus grande valeur que prend $F^n(x)$ quand x passe par toutes les valeurs, de x à $x+h$, l'erreur commise en prenant les n premiers termes de la série sera plus grande que $\frac{Ah^n}{1.2\ldots n}$, et plus petite que $\frac{Bh^n}{1.2\ldots n}$.

82. La formule

$$F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{1.2}F''(x) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}F^n(x+\theta h)$$

n'exige aucune condition relative aux dérivées d'un ordre supérieur au $n^{ième}$. Ces dernières pourraient être discontinues dans l'intervalle de x à $x+h$, sans que la formule cessât d'être exacte. Ainsi ce développement peut être exact quand on l'arrête à un certain terme, et devenir inexact si on voulait le pousser au delà.

Supposons, par exemple, que l'on ait

$$F(x) = f(x) + (x - x_0)^{m+\frac{p}{q}} \varphi(x),$$

m étant un nombre entier positif, et $\frac{p}{q}$ compris entre o et 1. Si l'on considère pour x la valeur particulière x_0, les dérivées seront finies jusqu'à $F^m(x_0)$ inclusivement, en supposant que celles de $f(x)$ et $\varphi(x)$ le soient; mais au delà elles deviendront infinies. Le développement ne devra donc être poussé que jusqu'au terme $\frac{h^{m-1}}{1.2...m-1} F^{m-1}(x_0)$ tout au plus; et il pourra être complété au moyen d'un terme renfermant la dérivée suivante.

83. Si, dans la formule (1), on fait $x = 0$, et qu'on remplace ensuite la lettre h par la lettre x, on obtient

$$(3) \quad \begin{cases} F(x) = F(0) + xF'(0) + \frac{x^2}{1.2} F''(0) + \ldots \\ + \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^{n-1}(0) + \frac{x^n}{1.2\ldots n} F^n(\theta x). \end{cases}$$

On peut ainsi développer une fonction de x suivant les puissances de x, pourvu que cette fonction et ses dérivées jusqu'à l'ordre n soient continues entre o et x. Si, à mesure que n augmente indéfiniment, l'expression $\frac{h^n}{1.2\ldots n} F^n(\theta x)$ tend vers zéro, la fonction $F(x)$ pourra être exprimée par la formule

$$(4) \quad F(x) = F(0) + xF'(0) + \frac{x^2}{1.2} F''(0) + \ldots;$$

c'est-à-dire que la limite de la somme des termes du second membre est $F(x)$. Cette dernière formule est celle de Maclaurin

Si on l'avait obtenue avant celle de Taylor, on en déduirait celle-ci en considérant $F(x+h)$ comme une fonction de h et la développant par la formule de Maclaurin.

84. On peut encore développer $F(x)$ d'après la formule de Taylor, en remplaçant x par $x_0 + (x - x_0)$; on trouve ainsi

$$F(x) = F(x_0) + (x - x_0) F'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{1.2} F''(x_0) + \ldots,$$

et l'on peut toujours choisir x_0 de telle sorte que $F(x_0)$, $F'(x_0)$, etc., ne soient pas infinies. Mais cela ne suffira pas, et il faudra toujours s'assurer que le reste de la série, dont nous connaissons l'expression, a pour limite o.

85. Enfin la série de Taylor a conduit Bernoulli à une autre forme de développement peu employée. Si l'on y suppose $h = -x$, elle devient

$$F(o) = F(x) - xF'(x) + \frac{x^2}{1.2} F''(x) - \frac{x^3}{1.2.3} F'''(x) + \ldots,$$

d'où

$$(5)\quad F(x) = F(o) + xF'(x) - \frac{x^2}{1.2} F''(x) + \frac{x^3}{1.2.3} F'''(x) - \ldots.$$

Les coefficients des différentes puissances de x sont eux-mêmes des fonctions de x; de sorte que l'on ne trouve pas dans ce développement le principal avantage que l'on cherche, qui est de remplacer la fonction par un polynôme entier et rationnel. On s'assurerait de son exactitude, comme dans les formules précédentes.

86. Il faut bien se garder de croire que les séries de Taylor ou de Maclaurin puissent être employées toutes les fois qu'elles sont convergentes; car elles pourraient converger vers d'autres limites que les fonctions qu'elles devraient représenter.

Ainsi, par exemple, la fonction $e^{-\frac{1}{x^2}}$ devient nulle ainsi que toutes ses dérivées, pour $x = 0$, et cependant elle n'est pas identiquement nulle. Il suit de là que si $F(x)$ est une fonction développable par la série de Maclaurin, $F(x) + e^{-\frac{1}{x^2}}$, développée par la même formule, donnera lieu à une série convergente, mais qui représentera $F(x)$, et sera, par conséquent, inexacte.

L'exactitude du développement ne peut jamais être établie que par la considération de l'expression qui en complète la valeur après un nombre quelconque de termes.

87. *Autre forme pour le reste.* — Il est quelquefois utile de donner au reste de la série de Taylor une autre forme que nous allons faire connaître.

Considérons d'abord le développement de $F(x)$; nous pouvons poser, en remplaçant x par $z + (x - z)$,

$$F(x) = F(z) + (x - z)F'(z) + \frac{(x-z)^2}{1.2}F''(z) + \ldots$$
$$+ \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{n-1}(z) + \frac{(x-z)^n}{1.2\ldots n}F^n[z + \theta(x - z)].$$

Si l'on représente le dernier terme par $f(z)$, et qu'on différentie les deux membres de l'équation par rapport à z, on obtient, toute réduction faite,

$$0 = \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^n(z) + f'(z).$$

Cette équation détermine la dérivée $f'(z)$ de la fonction

$$f(z), \quad \text{ou} \quad \frac{(x-z)^n}{1.2\ldots n}F^n[z + \theta(x - z)],$$

et donne

$$f'(z) = -\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^n(z).$$

Or on peut exprimer $f(z)$ au moyen de $f'(z)$ par la formule

$$f(z) = f(x) + (z - x) f'[x + \theta_1 (z - x)],$$

et l'on peut observer que $f(x) = 0$, puisqu'en faisant $z = x$ dans la fonction représentée par $f(z)$, on trouve identiquement zéro. La dernière équation donne donc

$$f(z) = \frac{(x-z)^n}{1.2\ldots(n-1)} (\theta_1)^{n-1} \mathrm{F}^n[x + \theta_1 (z - x)],$$

et l'on a ainsi une nouvelle expression du reste de la série qui donne le développement de $\mathrm{F}(x)$.

Si l'on suppose $z = 0$, on a le développement de Maclaurin, sous la forme suivante, en faisant $1 - \theta_1 = \theta$:

$$(6) \begin{cases} \mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(0) + x\mathrm{F}'(0) + \dfrac{x^2}{1.2}\mathrm{F}''(0) + \ldots \\ + \dfrac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\mathrm{F}^{n-1}(0) + \dfrac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\mathrm{F}^n(\theta x), \end{cases}$$

θ étant compris entre 0 et 1.

Dans le développement semblable donné précédemment, le reste est exprimé par

$$\frac{x^n}{1.2\ldots n}\mathrm{F}^n(\theta x),$$

θ désignant une fraction différente. La nouvelle forme donnée à ce reste est quelquefois plus propre à manifester la convergence de la série vers $\mathrm{F}(x)$.

Si dans la formule (6) on suppose $\mathrm{F}(x) = f(h + x)$, on aura

$$f(h+x) = f(h) + xf'(h) + \frac{x^2}{1.2}f''(h) + \ldots$$
$$+ \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{n-1}(h) + \frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^n(h+\theta x);$$

ou, en changeant les lettres h et x l'une dans l'autre,

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots$$
$$+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{n-1}(x)+\frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^n(x+\theta h),$$

c'est la série de Taylor, le reste étant présenté sous une nouvelle forme.

88. Appliquons les formules précédentes à quelques exemples.

Soit $F(x)=a^x$, on aura

$$F'(x)=a^x \operatorname{l} a\ldots, F^n(x)=a^x \operatorname{l}^n a,$$
$$F(0)=1, F'(0)=\operatorname{l} a\ldots, F^n(0)=\operatorname{l}^n a;$$

et, par suite,

$$a^x=1+x\operatorname{l}a+\frac{x^2\operatorname{l}^2 a}{1.2}+\ldots+\frac{x^{n-1}\operatorname{l}^{n-1}a}{1.2\ldots n-1}+\frac{x^n\operatorname{l}^n a}{1.2\ldots n}a^{\theta x}.$$

Le reste $\frac{x^n\operatorname{l}^n a}{1.2\ldots n}a^{\theta x}$ tendant vers zéro, à mesure que n augmente, la série indéfinie a pour somme a^x.

89. Soit

$$F(x)=\operatorname{l}(1+x),\quad F'(x)=(1+x)^{-1},$$
$$F''(x)=-(1+x)^{-2},\ F^n(x)=\pm 1.2\ldots(n-1)(1+x)^{-n},$$

d'où résulte

$$F(0)=0,\ F'(0)=1,\ F''(0)=-1,\ldots,\ F^n(0)=\pm 1.2\ldots(n-1),$$

et, par conséquent,

$$\operatorname{l}(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\pm\frac{x^n}{n}(1+\theta x)^{-n}.$$

La série serait composée de termes indéfiniment croissants si l'on supposait $x>1$, parce que la limite du rapport

d'un terme au précédent est x, lorsque leurs exposants augmentent indéfiniment (*voir* à la fin la Note sur les séries). Il suffit donc de s'assurer si le reste tend vers zéro quand on a $x < 1$; et pour cela il faut distinguer deux cas. Si x est positif, on a $\frac{x}{1+\theta x} < 1$, si $x < 1$; et par conséquent le reste tend vers zéro, et la série converge vers $l(1+x)$.

Si x est négatif et qu'on le représente par $-z$, le reste $\frac{z^n}{n(1-\theta z)^n}$ ne se présente pas sous une forme propre à faire reconnaître s'il tend vers zéro; parce que l'on n'aperçoit pas lequel est le plus grand des deux termes de la fraction $\frac{z}{1-\theta z}$. Mais si l'on prend la seconde forme que nous avons indiquée pour le reste, on trouvera pour le cas actuel $\frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{(1+\theta x)^n}$, ou, abstraction faite du signe,

$$\left(\frac{z-\theta z}{1-\theta z}\right)^{n-1}\cdot\frac{z}{1-\theta z}.$$

Or la fraction $\frac{z-\theta z}{1-\theta z}$ est moindre que l'unité si $z < 1$; donc le reste tend vers zéro et la série représente $l(1+x)$. Cette série peut donc être employée pour toutes les valeurs de x comprises entre $+1$ et -1.

90. On peut obtenir des séries plus convergentes que la précédente et plus applicables au calcul des logarithmes.

Si dans la formule

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3},\ldots$$

on change x en $-x$, on obtient

$$l(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3},\ldots,$$

et, en retranchant la seconde de la première,

$$1\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right).$$

Posant

$$\frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{1}{y}, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{1}{2y+1},$$

il vient

$$1\left(\frac{y+1}{y}\right) = 1(y+1) - 1y = 2\left[\frac{1}{2y+1} + \frac{1}{3(2y+1)^3} + \frac{1}{5(2y+1)^5} + \ldots\right].$$

Cette série très-convergente donne la différence des logarithmes de deux nombres entiers consécutifs, et fait connaître, par conséquent, les logarithmes de tous les nombres entiers depuis l'unité.

Connaissant les logarithmes dans la base e, on les obtiendrait dans toute autre base, en les divisant par le logarithme de la nouvelle base pris dans la base e.

Nous ferons connaître plus tard des procédés plus commodes pour la construction des Tables de logarithmes.

91. Soit maintenant

$$F(x) = (1+x)^m,$$

on aura

$$F'(x) = m(1+x)^{m-1}, \ldots, F^n(x) = m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

et, par suite,

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}x^n(1+\theta x)^{m-n}.$$

Pour que la série indéfinie représente $(1+x)^m$, il est d'abord nécessaire qu'elle soit convergente. Or le rapport du terme de rang p au précédent est $\frac{m-p+1}{p}x$, et tend vers $-x$ à mesure que p augmente; donc la série n'est pas convergente si x est en dehors des limites $+1$ et -1. Il

suffit donc de reconnaître si le reste tend vers zéro pour toutes les valeurs de x comprises entre ces limites.

Ce reste peut se décomposer dans les deux facteurs

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}x^n \text{ et } (1+\theta x)^{m-n}.$$

Le premier tend vers zéro, parce que si n augmente d'une unité, il se trouve multiplié par $\frac{m-n}{n+1}x$ qui s'approche de plus en plus de $-x$ dont la valeur absolue est moindre que l'unité; et quant au second facteur $\frac{(1+\theta x)^m}{(1+\theta x)^n}$, si l'on suppose d'abord x positif, il tend aussi vers zéro, à moins que θ ne s'approche indéfiniment de zéro; mais dans tous les cas ce facteur reste plus petit que l'unité, et, par conséquent, le reste de la série tend vers zéro. Donc elle représente $(1+x)^m$ pour toutes les valeurs de x comprises entre o et $+1$.

Mais si x est négatif, rien ne prouve que le second facteur ne croîtra pas indéfiniment avec n, et cela arrivera même certainement, à moins que θ ne tende vers zéro; car l'expression $(1+\theta x)^n$ tendrait vers zéro si la fraction $1+\theta x$ ne s'approchait pas indéfiniment de l'unité. Il faut alors avoir recours à la seconde forme du reste, qui est

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)x^n(1-\theta)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}(1+\theta x)^{m-n}.$$

Le facteur $\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)x^n}{1.2\ldots n-1}$ tend encore vers zéro; l'autre facteur devient, en remplaçant x par $-z$,

$$(1-\theta z)^{m-1}\left(\frac{1-\theta}{1-\theta z}\right)^{n-1}.$$

Or on a $\frac{1-\theta}{1-\theta z}<1$, puisque $z<1$: donc $\left(\frac{1-\theta}{1-\theta z}\right)^{n-1}$

tendra vers zéro, à moins que θ ne tende aussi vers zéro; et dans ce cas même cette expression est toujours moindre que l'unité, ainsi que $(1-\theta z)^{m-1}$. Donc le reste de la série tend vers zéro, et, par conséquent, celle-ci peut être employée pour toutes les valeurs de x comprises entre $+1$ et -1.

92. En prenant successivement $F(x)=\sin x$, $F(x)=\cos x$, on est conduit aux séries suivantes, qui sont exactes, quel que soit x:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots,$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots.$$

Elles supposent le rayon égal à l'unité, c'est-à-dire que x désigne le rapport de l'arc au rayon du cercle; et $\sin x$, $\cos x$ désignent les rapports des lignes auxquelles elles se rapportent, à ce même rayon. Dans le cas où il serait désigné par R, on remplacerait dans les seconds membres x par $\frac{x}{R}$, R étant le rayon; et dans les premiers, $\sin x$ et $\cos x$ par $\frac{\sin x}{R}$, $\frac{\cos x}{R}$. Quelque grand que soit x, les termes finissent par aller constamment en diminuant; et comme ils sont alternativement positifs et négatifs, l'erreur commise en arrêtant la série à un terme quelconque est moindre que le suivant.

93. Considérons maintenant des fonctions de $x+h$, et soit d'abord $F(x)=x^m$; on trouvera, quel que soit m,

$$(x+h)^m = x^m + mx^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}h^2 + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1.2\ \ldots\ (n-1)}x^{m-n+1}h^{n-1}$$
$$+ \frac{m\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}h^n(x+\theta h)^{m-n}.$$

Le rapport du terme de rang p au précédent est $\frac{m-p+1}{p}\frac{h}{x}$, et tend vers $-\frac{h}{x}$ quand p augmente indéfiniment; la série ne sera donc convergente que si l'ou a $h < x$, abstraction faite des signes. Quant au reste, on reconnaîtra, comme dans le cas de $(1+x)^m$, que si h est compris entre $+x$ et $-x$, il tend vers zéro; et la série représente par conséquent $(x+h)^m$.

94. Soit encore

$$F(x) = \log x,$$

d'où

$$F'(x) = \frac{\log e}{x},\ldots,\quad F^n(x) = \pm 1.2\ldots(n-1)\frac{\log e}{x^n};$$

on trouvera

$$\log(x+h) = \log x + \log e\left[\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \ldots \pm \frac{h^n}{n(x+\theta h)^n}\right].$$

La convergence de la série exige encore $h < x$; dans ce cas, on reconnaîtra, comme dans le cas de $\log(1+x)$, que le reste tend vers zéro, à mesure que n augmente, et que, par conséquent, $\log(x+h)$ peut se développer par la formule de Taylor, lorsque h est compris entre $+x$ et $-x$.

On déduirait le développement de $\log(x+h)$ de celui de $\log(1+x)$, en observant que

$$\log(x+h) - \log x = \log\left(1+\frac{h}{x}\right);$$

et de même on aurait déduit le développement de $(x+h)^m$ de celui de $(1+x)^m$, en observant que

$$(x+h)^m = x^m\left(1+\frac{h}{x}\right)^m.$$

On développerait aussi a^{x+h}, en remarquant que

$$a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1),$$

et il resterait à développer a^h par la formule donnée ci-dessus.

95. *Extension de la formule de Taylor aux fonctions de plusieurs variables.* — Proposons-nous maintenant de développer $F(x+h, y+k)$ suivant les puissances de h et k, $F(x, y)$ étant une fonction donnée. Pour cela nous considérerons d'abord la fonction $F(x+ht, y+kt)$, et nous la développerons suivant les puissances de t par la formule de Maclaurin ; il suffira ensuite de faire $t=1$ pour avoir le développement cherché. Or, pour avoir les coefficients des différentes puissances de t, il faut prendre les dérivées successives de $F(x+ht, y+kt)$ par rapport à t, puis y faire $t=0$. On trouvera par la règle des fonctions composées de fonctions linéaires, en entendant que dans toutes les dérivées partielles de $F(x, y)$ on remplace x et y par $x+ht$, $y+kt$,

$$\frac{dF}{dt}=\frac{dF}{dx}h+\frac{dF}{dy}k,$$

$$\frac{d^2F}{dt^2}=\frac{d^2F}{dx^2}h^2+2\frac{d^2F}{dxdy}hk+\frac{d^2F}{dy^2}k^2,$$

. . . .

$$\frac{d^nF}{dt^n}=\frac{d^nF}{dx^n}h^n+n\frac{d^nF}{dx^{n-1}dy}h^{n-1}k+\ldots+\frac{d^nF}{dy^n}k^n.$$

Si l'on fait $t=0$ dans toutes ces dérivées partielles, elles deviennent celles de la fonction même $F(x, y)$. On aura donc

$$F(x+ht, y+kt)=F(x, y)+\left(\frac{dF}{dx}h+\frac{dF}{dy}k\right)t+\ldots$$
$$+\frac{t^n}{1.2\ldots n}\left(\frac{d^nF}{dx^n}h^n+\ldots+\frac{d^nF}{dy^n}k^n\right)_{x+\theta ht,\ y+\theta kt},$$

x et y étant remplacés par $x+\theta ht$ et $y+\theta ht$ dans le coefficient de t^n. Faisant maintenant $t=1$, on aura le développement cherché :

$$
\begin{aligned}
(1)\ F(x+h,y+k) = F(x,y) &+ \frac{dF}{dx}h + \frac{d^2F}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \ldots + \frac{d^{n-1}F}{dx^{n-1}}\frac{h^{n-1}}{1\ldots(n-1)} + \ldots \\
&+ \frac{dF}{dy}k + \frac{d^2F}{dxdy}hk + \ldots + \frac{d^{n-1}F}{dx^{n-2}dy}\frac{h^{n-2}}{1\ldots(n-2)}\frac{k}{1} + \ldots \\
&\qquad + \frac{d^2F}{dy^2}\frac{k^2}{1.2} + \ldots + \frac{d^{n-1}F}{dx^{n-3}dy^2}\frac{h^{n-3}}{1\ldots(n-3)}\frac{k^2}{1.2} + \ldots + \left(\begin{array}{l} \dfrac{d^nF}{dx^n}\dfrac{h^n}{1.2\ldots n} \\ + \ldots \\ \\ \\ + \dfrac{d^nF}{dy^n}\dfrac{k^n}{1.2\ldots n} \end{array}\right)_{\substack{x+\theta h \\ y+\theta k}} \\
&\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad\qquad + \frac{d^{n-1}F}{dy^{n-1}}\frac{k^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} + \ldots
\end{aligned}
$$

pourvu que toutes les dérivées partielles, jusqu'à l'ordre n inclusivement, soient continues entre $x+h$ et $y+k$.

On aurait une formule analogue si au lieu de $F(x, y)$ on avait une fonction d'un nombre quelconque de variables.

Pour que cette série, poussée indéfiniment, représente $F(x+h; y+k)$, il faut que l'ensemble des termes qui expriment le reste tende vers zéro; et l'on pourra s'en assurer en prenant la valeur de θ qui rendrait ce reste le plus grand possible, et cherchant si cette valeur maximum tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment. Quand il arrivera que chaque terme du reste tende vers zéro, quelque valeur qu'ait θ entre o et 1, il sera prouvé que le reste lui-même diminue indéfiniment; et la fonction $F(x+h, y+k)$ sera développable en série suivant les puissances entières et positives de h et k.

96. Si dans la formule précédente on fait $x=0, y=0$, on a le développement de $F(h, k)$; et si l'on change h et k en x et y, on obtient

$$(2)\quad F(x,y) = F(0,0) + \left(\frac{dF}{dx}\right)_0 x + \left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)_0 \frac{x^2}{1.2} + \ldots \qquad \left(\frac{d^nF}{dx^n}\frac{x^n}{1.2\ldots n}\right.$$
$$+ \left(\frac{dF}{dy}\right)_0 y + \left(\frac{d^2F}{dx\,dy}\right)_0 xy + \ldots + \qquad\qquad$$
$$\left(\frac{d^2F}{dy^2}\right)_0 \frac{y^2}{1.2} + \ldots \qquad \left. + \frac{d^nF}{dy^n}\frac{y^n}{1.2\ldots n}\right)_{\theta x,\, \theta y}.$$

Dans toutes les dérivées partielles de $F(x, y)$ on doit remplacer x et y par o, excepté dans les termes du reste, où ils doivent être remplacés par θx, θy. Si ce reste tend vers zéro quand n augmente, $F(x, y)$ peut se développer en série indéfinie suivant les puissances de x et y. On a ainsi la formule de Maclaurin étendue aux fonctions de deux variables; et on l'étendrait semblablement aux fonctions d'un nombre quelconque de variables.

Les deux formules (1) et (2) peuvent être écrites comme il suit, $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tendant vers zéro avec h et k :

$$(3)\quad \begin{aligned} F(x+h,\ y+k) = F(x,y) &+ \frac{dF}{dx}h + \ldots + \frac{d^{n-1}F}{dx^{n-1}}\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} + \left(\frac{d^nF}{dx^n}+\alpha\right)\frac{h^n}{1.2\ldots n} \\ &+ \frac{dF}{dy}k + \ldots + \frac{d^{n-1}F}{dx^{n-1}dy}\frac{h^{n-2}}{1\ldots(n-2)}\frac{k}{1} + \left(\frac{d^nF}{dx^{n-1}dy}+\alpha_1\right)\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\frac{k}{1} \\ &\qquad + \ldots \qquad\qquad\qquad + \ldots \\ &\qquad + \frac{d^{n-1}F}{dy^{n-1}}\frac{k^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} \\ &\qquad\qquad + \left(\frac{d^nF}{dy^n}+\alpha_n\right)\frac{k^n}{1.2\ldots n}; \end{aligned}$$

$$(4)\quad \begin{aligned} F(x,y) = F(0,0) &+ \left(\frac{dF}{dx}\right)_0 x + \ldots + \left(\frac{d^{n-1}F}{dx^{n-1}}\right)_0\frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} + \left\{\left(\frac{d^nF}{dx_n}\right)_0+\alpha\right\}\frac{x^n}{1\ldots n} \\ &+ \left(\frac{dF}{dy}\right)_0 y + \ldots + \\ &\qquad + \left(\frac{d^{n-1}F}{dy^{n-1}}\right)_0\frac{y^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} \\ &\qquad\qquad + \left\{\left(\frac{d^nF}{dy_n}\right)_0+\alpha_n\right\}\frac{y^n}{1.2\ldots n}. \end{aligned}$$

Des maxima et minima des fonctions d'une seule variable.

97. On dit qu'une fonction $F(x)$ prend une valeur maximum pour la valeur x_0 de x, lorsque x croissant ou décroissant à partir de x_0 dans un intervalle déterminé, quelque petit qu'il soit, la fonction $F(x)$ est toujours moindre que $F(x_0)$. La valeur de la fonction est minimum lorsque, dans les mêmes circonstances, $F(x)$ est toujours plus grand que $F(x_0)$.

Il résulte de là que, pour que x_0 donne un maximum ou un minimum pour $F(x)$, il est nécessaire et suffisant que $F(x_0 + h) - F(x_0)$ soit constamment négatif ou constamment positif, quel que soit le signe de h, pourvu que sa valeur soit suffisamment petite. Il n'y a de règles générales, pour s'en assurer, que quand $F'(x)$ est continu dans le voisinage de x_0, et c'est le seul cas que nous examinerons.

On aura alors

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = hF'(x_0 + \theta h).$$

Lorsque h tend vers zéro, $F'(x_0+\theta h)$ tend vers $F'(x_0)$; et si cette dernière valeur n'était pas nulle, le second membre changerait de signe avec h: la différence $F(x_0+h)-F(x_0)$ ne serait donc pas de signe constant, quel que fût le signe de h, et par conséquent $F(x)$ ne serait ni maximum ni minimum, pour $x = x_0$. Une condition commune au maximum et au minimum est donc $F'(x_0) = 0$, et c'est seulement parmi les racines réelles de l'équation $F'(x) = 0$ qu'il faut chercher les valeurs de x propres à rendre $F(x)$ maximum ou minimum. La valeur x_0 étant ainsi choisie, on aura

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \frac{h^2}{1.2} F''(x_0 + \theta h).$$

La limite de $F''(x_0 + \theta h)$ est $F''(x_0)$ lorsque h tend vers zéro, et si $F''(x_0)$ n'est pas nul, il est évident que pour toutes les valeurs de h positives ou négatives, comprises dans des limites suffisamment petites, le second membre et, par suite, la différence $F(x_0+h) - F(x_0)$ conservent toujours le même signe. La valeur $F(x_0)$ est donc maximum ou minimum. Elle est maximum lorsque l'on a $F''(x_0) < 0$, et minimum si $F''(x_0) > 0$. Mais si par hasard on a $F''(x_0) = 0$, on ne peut plus rien conclure, et il faut mettre la différence sous une autre forme. On pourra écrire dans ce cas

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \frac{h^3}{1.2.3} F'''(x_0 + \theta h),$$

et comme h^3 change de signe avec h, on voit que si $F'''(x_0)$ n'est pas nul, la différence changerait de signe avec h; il n'y aurait donc ni maximum ni minimum.

Mais si $F'''(x_0) = 0$, on a

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \frac{h^4}{1.2.3.4} F^{\text{iv}}(x_0 + \theta h),$$

et il est clair que si l'on a $F^{\text{iv}}(x_0) < 0$, la différence est constamment négative, et $F(x_0)$ sera maximum; tandis que si l'on a $F^{\text{iv}}(x_0) > 0$, elle sera constamment positive, et $F(x_0)$ sera minimum.

Les mêmes raisonnements étant continués jusqu'à ce que l'on obtienne une dérivée qui ne devienne pas nulle pour $x = x_0$, on arrive à cette conclusion générale, que, *pour que x_0 rende maximum ou minimum une fonction dont les dérivées sont continues, il faut que cette valeur de x annule un nombre impair de dérivées consécutives, à partir de la première; et lorsque cette condition est remplie, on a un maximum, si la dérivée suivante est rendue négative par cette valeur de x, et un minimum si elle est positive.*

La recherche des maxima et minima est ainsi ramenée à la détermination des dérivées d'une fonction d'une seule variable, et des racines réelles d'une équation à une inconnue.

Si cette fonction n'est pas donnée d'une manière explicite, on formera ses dérivées par les règles connues, puis on appliquera la théorie qui vient d'être exposée, et qui est indépendante des moyens à employer pour former ces dérivées. Nous allons montrer quelle est, dans ce cas, la marche du calcul.

98. *Cas des fonctions implicites.* — Considérons une fonction liée à $m-1$ variables par $m-1$ équations données : soient, pour fixer les idées, les trois équations

$$F(x, y, z, u) = 0, \quad F_1(x, y, z, u) = 0; \quad F_2(x, y, z, u) = 0,$$

u étant la fonction dont il faut trouver le maximum ou le minimum.

En les différentiant, on trouve

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{dF}{dx} + \dfrac{dF}{dy}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{dF}{dz}\dfrac{dz}{dx} + \dfrac{dF}{du}\dfrac{du}{dx} = 0, \\ \dfrac{dF_1}{dx} + \dfrac{dF_1}{dy}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{dF_1}{dz}\dfrac{dz}{dx} + \dfrac{dF_1}{du}\dfrac{du}{dx} = 0, \\ \dfrac{dF_2}{dx} + \dfrac{dF_2}{dy}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{dF_2}{dz}\dfrac{dz}{dx} + \dfrac{dF_2}{du}\dfrac{du}{dx} = 0; \end{cases}$$

au moyen de ces équations, on éliminera $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, et la valeur de $\frac{du}{dx}$ qu'on en tirera, devra ensuite être égalée à zéro : ou, plus simplement, on remplacera $\frac{du}{dx}$ par zéro dans ces équations, puis on éliminera $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ entre les équations

résultantes, qui sont

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dF}{dx} + \dfrac{dF}{dy}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{dF}{dz}\dfrac{dz}{dx} = 0, \\ \dfrac{dF_1}{dx} + \dfrac{dF_1}{dy}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{dF_1}{dz}\dfrac{dz}{dx} = 0, \\ \dfrac{dF_2}{dx} + \dfrac{dF_2}{dy}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{dF_2}{dz}\dfrac{dz}{dx} = 0. \end{cases}$$

Éliminant $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$, on obtiendra une équation qui, jointe aux trois autres $F = 0$, $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, déterminera x, y, z, u.

On différentiera de nouveau les équations (1) et l'on obtiendra la valeur de $\frac{d^2u}{dx^2}$; on y substituera les valeurs trouvées de x, y, z, u, et l'on reconnaîtra au signe de cette expression, s'il y a maximum ou minimum. Si l'on avait $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$, on chercherait les dérivées suivantes de u par rapport à x, et l'on y appliquerait la théorie précédente.

99. Pour éliminer $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ des équations (2), on peut se servir de la *méthode des multiplicateurs*. Pour cela on multipliera les deux dernières par des facteurs indéterminés λ, μ, et on les ajoutera à la première; puis on égalera à zéro les coefficients de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, et le terme indépendant : ce qui conduit aux trois équations

$$\frac{dF}{dx} + \lambda\frac{dF_1}{dx} + \mu\frac{dF_2}{dx} = 0,$$
$$\frac{dF}{dy} + \lambda\frac{dF_1}{dy} + \mu\frac{dF_2}{dy} = 0,$$
$$\frac{dF}{dz} + \lambda\frac{dF_1}{dz} + \mu\frac{dF_2}{dz} = 0,$$

d'où l'on éliminera λ et μ; ce qui conduira, comme on le sait par les théories de l'algèbre, à la même équation que si l'on avait éliminé autrement $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$. Ce procédé de calcul a souvent des avantages sur l'autre.

100. Considérons maintenant une fonction de m variables, liées par $m-1$ équations : ce cas renferme le précédent, qui s'en déduit en supposant que la fonction se réduise à l'une des variables. Soient, par exemple, les trois équations

$$F(x, y, z, u) = 0, \quad F_1(x, y, z, u) = 0, \quad F_2(x, y, z, u) = 0,$$

et soit proposé de trouver le maximum de la fonction $f(x, y, z, u)$. Dans ce cas aux équations (1), dans lesquelles $\frac{du}{dx}$ ne serait plus zéro, on joindrait la suivante :

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{df}{du}\frac{du}{dx} = 0,$$

et de ces quatre équations on éliminerait $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{du}{dx}$. Il en résulterait une équation entre x, y, z, u, qui, jointe aux équations données, déterminerait ces quatre quantités. On chercherait ensuite la dérivée seconde de $f(x, y, z, u)$ par rapport à x; elle renfermerait $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2u}{dx^2}$, qui seront faciles à trouver au moyen des trois équations (1); et l'on reconnaîtrait, au signe de cette seconde dérivée, si la fonction $f(x, y, z, u)$ est minimum ou maximum.

On peut remarquer que les équations entre lesquelles on a à éliminer $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{du}{dx}$ seraient les mêmes si l'on avait à chercher le maximum de l'une des fonctions F, F_1, F_2, les deux autres étant égales à zéro, ainsi que f.

Des maxima et minima des fonctions de plusieurs variables.

101. On dit qu'une fonction $F(x, y)$ des deux variables indépendantes x, y acquiert une valeur maximum, pour certaines valeurs, x_0, y_0, de x et y, lorsqu'en changeant ces variables en $x_0 + h, y_0 + k$, h et k étant des quantités arbitraires comprises entre o et des limites positives ou négatives aussi petites que l'on voudra, la fonction est constamment moindre que pour les valeurs x_0, y_0. Si, au contraire, elle était constamment plus grande, on dirait qu'elle est minimum pour ces mêmes valeurs.

D'après cela, la différence

$$F(x+h,\ y+k) - F(x, y)$$

doit être constamment négative, quels que soient les valeurs et les signes des quantités infiniment petites h et k, si $F(x, y)$ est maximum; et elle doit être constamment positive dans le cas du minimum. De sorte que ce sera un caractère commun au maximum et au minimum, qu'elle soit invariable de signe.

Nous ne considérerons que le cas où la fonction et ses dérivées, jusqu'à l'ordre dont on aura besoin, sont continues. Les cas de discontinuité ne donnent pas lieu à des règles générales, et se discuteront suivant la question.

D'après une formule précédente, nous aurons, en désignant par α, α_1 des quantités infiniment petites,

$$F(x+h, y+k) - F(x, y) = \left(\frac{dF}{dx} + \alpha\right) h + \left(\frac{dF}{dy} + \alpha_1\right) k.$$

Si $\frac{dF}{dx}$ et $\frac{dF}{dy}$ sont différents de zéro, le signe du second membre, lorsque h et k tendront vers zéro, finira par être

constamment le même que celui de

$$\frac{dF}{dx}h + \frac{dF}{dy}k.$$

Or cette expression change de signe si l'on change h et k de signes, sans changer leur grandeur; donc $F(x, y)$ ne serait ni maximum ni minimum, et, par conséquent, pour qu'elle puisse être l'un ou l'autre, il est indispensable que l'expression précédente soit nulle; comme h et k sont indépendants l'un de l'autre, on devra avoir

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0.$$

Si ces conditions sont remplies, on aura

$$F(x+h, y+k) - F(x, y) = \left(\frac{d^2F}{dx^2} + \alpha\right)\frac{h^2}{1.2} + \left(\frac{d^2F}{dxdy} + \alpha_1\right)hk + \left(\frac{d^2F}{dy^2} + \alpha_2\right)\frac{k^2}{1.2},$$

et si les trois dérivées du second ordre ne sont pas toutes rendues nulles par les valeurs x, y, le signe du second membre, et par suite de l'accroissement, finira par être le même que celui du trinôme

$$\frac{d^2F}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \frac{d^2F}{dxdy}hk + \frac{d^2F}{dy^2}\frac{k^2}{2}.$$

Il faut que cette expression soit constamment négative, quels que soient h et k, pour que $F(x, y)$ soit maximum, et constamment positive pour qu'elle soit minimum. Si on la divise par $\frac{h^2}{2}$, ce qui n'en change pas le signe, on obtient

$$\frac{d^2F}{dy^2}\left(\frac{k}{h}\right)^2 + 2\frac{d^2F}{dxdy}\left(\frac{k}{h}\right) + \frac{d^2F}{dx^2};$$

et pour que ce trinôme ne change pas de signe, quel que soit $\frac{k}{h}$, et ne soit jamais nul, il faut que l'on ait

$$\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)^2 < \frac{d^2F}{dx^2}\cdot\frac{d^2F}{dy^2},$$

condition qui entraîne que $\frac{d^2F}{dx^2}$ et $\frac{d^2F}{dy^2}$ soient de même signe.

Si elle est satisfaite par les valeurs de x et y tirées des deux équations

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0,$$

la fonction $F(x, y)$ sera maximum si $\frac{d^2F}{dx^2}$ et $\frac{d^2F}{dy^2}$ sont négatifs, et minimum s'ils sont positifs.

Si les trois dérivées du second ordre étaient nulles, il faudrait que toutes celles du troisième le fussent, et que le signe d'un polynôme du quatrième degré par rapport à $\frac{k}{h}$ fût constant : ce qui conduirait à des conditions plus compliquées. On continuerait semblablement si les dérivées du quatrième ordre étaient encore toutes nulles.

102. Ces raisonnements s'étendent facilement à une fonction d'un nombre quelconque de variables indépendantes ; seulement les conditions se compliquent de plus en plus. Dans le cas de trois variables par exemple, on aura les trois équations

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0, \quad \frac{dF}{dz} = 0,$$

et il faudra que le polynôme

$$\frac{d^2F}{dx^2}h^2 + \frac{d^2F}{dy^2}k^2 + \frac{d^2F}{dz^2}l^2$$
$$+ 2\frac{d^2F}{dxdy}hk + 2\frac{d^2F}{dxdz}hl + 2\frac{d^2F}{dydz}kl$$

soit constamment de même signe, quels que soient h, k, l. Pour exprimer cette condition, on divisera d'abord par h^2; et si l'on pose $\frac{k}{h} = p$, $\frac{l}{h} = q$, on aura un polynôme de la forme

$$Aq^2 + Bp^2 + 2Cpq + 2Dq + 2Ep + F.$$

En le considérant relativement à la variable q seulement, il faudra, pour qu'il ne change pas de signe, que l'on ait, quel que soit p,

$$(C^2 - AB)p^2 + 2(CD - AE)p + D^2 - AF < 0.$$

On posera sans difficulté la condition pour que ce polynôme soit de même signe quel que soit p, et l'on y ajoutera, pour qu'il soit négatif,

$$C^2 - AB < 0.$$

De même que le cas de deux indéterminées p, q se ramène à une seule, on ramènerait celui de trois à deux, et ainsi de suite.

103. *Cas d'une fonction implicite.* — Proposons-nous de trouver le maximum d'une fonction $f(x, y, z)$ en supposant les variables x, y, z liées par une équation

$$F(x, y, z) = 0,$$

en vertu de laquelle z est une fonction implicite des deux variables indépendantes x, y.

La théorie précédente exige que les dérivées partielles de $f(x, y, z)$ par rapport à x et y soient nulles séparément; ce qui donne

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dy} = 0,$$

équations dans lesquelles on mettra pour $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ leurs va-

et pour que ce trinôme ne change pas de signe, quel que soit $\frac{k}{h}$, et ne soit jamais nul, il faut que l'on ait

$$\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)^2 < \frac{d^2F}{dx^2}\cdot\frac{d^2F}{dy^2},$$

condition qui entraîne que $\frac{d^2F}{dx^2}$ et $\frac{d^2F}{dy^2}$ soient de même signe.

Si elle est satisfaite par les valeurs de x et y tirées des deux équations

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0,$$

la fonction $F(x, y)$ sera maximum si $\frac{d^2F}{dx^2}$ et $\frac{d^2F}{dy^2}$ sont négatifs, et minimum s'ils sont positifs.

Si les trois dérivées du second ordre étaient nulles, il faudrait que toutes celles du troisième le fussent, et que le signe d'un polynôme du quatrième degré par rapport à $\frac{k}{h}$ fût constant : ce qui conduirait à des conditions plus compliquées. On continuerait semblablement si les dérivées du quatrième ordre étaient encore toutes nulles.

102. Ces raisonnements s'étendent facilement à une fonction d'un nombre quelconque de variables indépendantes ; seulement les conditions se compliquent de plus en plus. Dans le cas de trois variables par exemple, on aura les trois équations

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0, \quad \frac{dF}{dz} = 0,$$

et il faudra que le polynôme

$$\frac{d^2F}{dx^2}h^2 + \frac{d^2F}{dy^2}k^2 + \frac{d^2F}{dz^2}l^2$$
$$+ 2\frac{d^2F}{dxdy}hk + 2\frac{d^2F}{dxdz}hl + 2\frac{d^2F}{dydz}kl$$

soit constamment de même signe, quels que soient h, k, l. Pour exprimer cette condition, on divisera d'abord par h^2; et si l'on pose $\frac{k}{h} = p$, $\frac{l}{h} = q$, on aura un polynôme de la forme

$$Aq^2 + Bp^2 + 2Cpq + 2Dq + 2Ep + F.$$

En le considérant relativement à la variable q seulement, il faudra, pour qu'il ne change pas de signe, que l'on ait, quel que soit p,

$$(C^2 - AB)p^2 + 2(CD - AE)p + D^2 - AF < 0.$$

On posera sans difficulté la condition pour que ce polynôme soit de même signe quel que soit p, et l'on y ajoutera, pour qu'il soit négatif,

$$C^2 - AB < 0.$$

De même que le cas de deux indéterminées p, q se ramène à une seule, on ramènerait celui de trois à deux, et ainsi de suite.

103. *Cas d'une fonction implicite.* — Proposons-nous de trouver le maximum d'une fonction $f(x, y, z)$ en supposant les variables x, y, z liées par une équation

$$F(x, y, z) = 0,$$

en vertu de laquelle z est une fonction implicite des deux variables indépendantes x, y.

La théorie précédente exige que les dérivées partielles de $f(x, y, z)$ par rapport à x et y soient nulles séparément; ce qui donne

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dy} = 0,$$

équations dans lesquelles on mettra pour $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ leurs va-

leurs tirées des deux suivantes:

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx}=0,\quad \frac{dF}{dy}+\frac{dF}{dz}\frac{dz}{dy}=0.$$

On aura ainsi deux équations entre x, y, z, qui, jointes à $F(x, y, z) = 0$, détermineront x, y, z. On formera ensuite les dérivées partielles du second ordre de $f(x, y, z)$: elles dépendront de celles de z, qui seront déterminées par les règles de la différentiation des fonctions implicites à deux variables.

En général, quel que soit le nombre des variables qui entrent dans la fonction, et le nombre des équations qui les lient, il suffira de reconnaître les variables indépendantes, et d'égaler à zéro les dérivées partielles de la fonction par rapport à ces variables. Les équations qui en résulteront, jointes aux équations données, seront toujours en même nombre que les variables, et les détermineront. On formera ensuite facilement les dérivées partielles successives de la fonction par rapport aux variables indépendantes, et on les soumettra aux épreuves établies dans la théorie précédente.

104. On peut donner une autre forme au calcul du maximum ou du minimum d'une fonction de $m+n$ variables, liées par n équations, ce qui est le cas le plus général.

Il y a alors m variables indépendantes, et l'on devra égaler à zéro les dérivées partielles de la fonction par rapport à chacune d'elles; ce qui revient à dire qu'on égalera à zéro la différentielle totale de cette fonction, quelles que soient les valeurs des différentielles indépendantes. Et, pour cela, on tirera des équations données les valeurs des différentielles des variables dépendantes en fonction de celles des variables indépendantes; on les substituera dans la différentielle totale de la fonction proposée, puis

on égalera à zéro les coefficients de toutes les différentielles qui y seront restées.

Soit f la fonction des $m+n$ variables x, y, z, u, etc., qui sont liées par les n équations

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \ldots,$$

on aura les $n+1$ équations suivantes :

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz + \ldots = 0,$$

$$\frac{dL}{dx}dx + \frac{dL}{dy}dy + \frac{dL}{dz}dz + \ldots = 0,$$

$$\frac{dM}{dx}dx + \frac{dM}{dy}dy + \frac{dM}{dz}dz + \ldots = 0,$$

$$\frac{dN}{dx}dx + \frac{dN}{dy}dy + \frac{dN}{dz}dz + \ldots = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et l'on doit tirer des n dernières les valeurs des différentielles des n variables dépendantes, les reporter dans la première, et égaler à zéro les coefficients des m différentielles arbitraires qui y resteront. En d'autres termes, il faut éliminer n différentielles de ces $n+1$ équations, et égaler à zéro les coefficients de celles qui subsisteront dans l'équation finale.

Pour faire cette élimination, on multipliera les n dernières équations par des facteurs indéterminés λ, μ, ν, etc., on les ajoutera à la première, et l'on égalera à zéro les coefficients des n différentielles des variables dépendantes, ce qui déterminera λ, μ, ν, etc., puis on égalera à zéro les coefficients des m autres variables; ce qui revient évidemment à annuler les coefficients des $m+n$ différentielles, après l'addition des équations, et à éliminer λ, μ, ν, etc., de ces $m+n$ équations; ce qui conduira à m équations entre x, y, z, etc., qui, jointes aux n équations données,

déterminent les valeurs de ces variables qui peuvent donner les maxima et minima de la fonction proposée. On les distinguera ensuite au moyen des secondes dérivées partielles de la fonction, comme nous l'avons fait connaître ci-dessus.

On peut remarquer que le calcul serait le même si l'on s'était proposé de trouver le maximum ou le minimum absolu de $f + \lambda L + \mu M + \ldots$, en ayant égard ensuite aux équations $L = 0$, $M = 0$.

Application à quelques exemples.

105. Trouver le minimum de $x^x \ldots x = \frac{1}{e}$;

Minimum de $\frac{a^x}{x} \cdots x = \frac{1}{la}$;

Maximum de $\frac{lx}{x}, \cdots x = e$.

Partager un nombre en trois parties x, y, z, telles que $x^m y^n z^p$ soit maximum, ... $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}$.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

Tangentes et normales aux courbes planes. Expression générale de la longueur de la tangente, de la sous-tangente, de la normale et de la sous-normale.

106. On appelle, en général, *tangente à une courbe* la limite vers laquelle tend la direction d'une sécante qui passe par un point constant de cette courbe, et dont un second point d'intersection se rapproche indéfiniment du premier.

Les anciens donnaient des définitions moins générales de la tangente : on les a abandonnées, à cause du grand nombre d'exceptions auxquelles elles donnaient lieu.

Si l'on désigne par $F(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe quelconque, et par x', y' les coordonnées du point de cette courbe, auquel on veut mener une tangente, l'équation de la sécante menée par ce point et par celui dont les coordonnées sont $x' + \Delta x'$, $y' + \Delta y'$, et qui appartient aussi à la courbe, sera, dans un système quelconque d'axes,

$$y - y' = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}(x - x').$$

A mesure que le second point d'intersection se rapproche du premier, $\frac{\Delta y'}{\Delta x'}$ tend vers la dérivée de y par rapport à x; il existe donc une direction limite pour la sécante, et l'équation de cette droite que nous appelons tangente est

$$y - y' = \frac{dy'}{dx'}(x - x').$$

Le coefficient $\frac{dy'}{dx'}$ sera déterminé en fonction de x', y', d'après les règles du calcul différentiel, au moyen de l'équation $F(x, y) = 0$, qui donne $\frac{dy'}{dx'} = -\frac{\frac{dF}{dx'}}{\frac{dF}{dy'}}$.

L'équation de la tangente devient ainsi

$$(y - y')\frac{dF}{dy'} + (x - x')\frac{dF}{dx'} = 0.$$

107. On appelle *normale* la perpendiculaire à la tangente, menée par le point de contact. Si les axes sont rectangulaires, son équation sera

$$y - y' = -\frac{1}{\frac{dy'}{dx'}}(x - x'), \text{ ou } y - y' = -\frac{dx'}{dy'}(x - x'),$$

ou encore

$$(y - y')\frac{dF}{dx'} - (x - x')\frac{dF}{dy'} = 0.$$

Si les axes des coordonnées font entre eux un angle quelconque θ, l'équation de la normale aura la forme suivante :

$$(y - y')\left(\frac{dF}{dx'} - \frac{dF}{dy'}\cos\theta\right) - (x - x')\left(\frac{dF}{dy'} - \frac{dF}{dx'}\cos\theta\right) = 0.$$

Si les coordonnées x', y' n'étaient pas données et que la tangente, ou la normale, fût assujettie à passer par un point donné; ou bien à être parallèle à une droite donnée, on obtiendrait immédiatement, d'après les équations précédentes, une équation entre x', y', qui, jointe à celle de la courbe, déterminerait ces deux inconnues. Si, au lieu de chercher les solutions réelles de ces deux

équations, on construisait les lieux géométriques qu'elles représentent, en y regardant x', y' comme variables, les points d'intersection de ces lieux, dont l'un est la courbe proposée, seraient les points de contact cherchés.

108. On appelle *sous-tangente* et *sous-normale* les parties de l'axe des x comprises respectivement entre le pied de l'ordonnée du point de contact et les points où cet axe est rencontré par la tangente et la normale. Elles ont pour expression la valeur de $x - x'$ relative à $y = 0$ dans les équations respectives de la tangente et de la normale. Elles seront dirigées vers les x positifs ou négatifs, à partir du pied de l'ordonnée, suivant que $x - x'$ sera positif ou négatif.

Nous appellerons *longueurs de la tangente et de la normale* les parties de ces lignes comprises entre le point de contact et les points où elles coupent respectivement l'axe des x.

Il est facile d'obtenir l'expression de ces différentes lignes. Nous supposerons, pour plus de simplicité, les axes rectangulaires, et nous représenterons par T la tangente, par N la normale, par S_t la sous-tangente, et par S_n la sous-normale. Cela posé, on trouvera facilement les formules suivantes :

$$S_t = -\frac{y'}{\frac{dy'}{dx'}} = -\frac{y'dx'}{dy'}, \quad S_n = y'\frac{dy'}{dx'},$$

$$T = y'\sqrt{1 + \frac{dx'^2}{dy'^2}}, \quad N = y'\sqrt{1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}}.$$

109. Si l'on applique toutes ces formules à l'ellipse et à l'hyperbole, renfermées dans l'équation

$$a^2y^2 \pm b^2x^2 = \pm a^2b^2,$$

on trouvera les résultats suivants :

$$\left.\begin{array}{l} a^2x'(y-y')\pm b^2x'(x-x')=0 \\ \text{ou } a^2yy'\pm b^2xx'=\pm a^2b^2 \end{array}\right\}\text{ équation de la tangente;}$$

$$b^2x'(y-y')\mp a^2y'(x-x')=0,\text{ équation de la normale;}$$

$$S_t=\frac{a^2-x'^2}{x'},\quad S_n=\mp\frac{b^2x'}{a^2};$$

$$T=\frac{y'}{b^2x'}\sqrt{a^4y'^2+b^4x'^2},\quad N=\frac{1}{a^2}\sqrt{a^4y'^2+b^4x'^2}.$$

110. Si l'on considère la parabole ayant pour équation $y^2=2px$, on trouvera

$$\left.\begin{array}{l} (y-y')y'-p(x-x')=0 \\ \text{ou } yy'=p(x+x') \end{array}\right\}\text{ équation de la tangente;}$$

$$y-y'=-\frac{y'}{p}(x-x'),\quad\text{équation de la normale;}$$

$$S_t=2x',\quad S_n=p,$$

$$T=\sqrt{2x'(2x'+p)},\quad N=\sqrt{p(2x'+p)}.$$

111. Considérons maintenant la logarithmique ayant pour équation $y=a\,l\,\frac{x}{m}$; a et m sont des lignes données, et les logarithmes sont relatifs à la base de Neper, ce qui ne diminue en rien la généralité de l'équation. On aura, dans ce cas :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a}{x};$$

$$y-y'=\frac{a}{x'}(x-x'),\text{ équation de la tangente;}$$

$$y-y'=-\frac{x'}{a}(x-x'),\text{ équation de la normale;}$$

$$S_t=-x'\,l\,\frac{x'}{m},\quad S_n=\frac{y'a}{x'}=\frac{a^2\,l\,\frac{x'}{m}}{x'}.$$

Si l'on prend la sous-tangente et la sous-normale sur l'axe des y au lieu de l'axe des x, elles auront pour expression la valeur de $y - y'$ relative à $x = 0$.

On trouvera ainsi

$$S_{t} = -a, \quad S_{n} = \frac{x'^{2}}{a}.$$

112. Considérons encore la courbe nommée *cycloïde*, qui jouit de plusieurs propriétés très-remarquables.

Elle est engendrée par un point de la circonférence d'un cercle qui roule, sans glisser, sur une droite indéfinie à laquelle il est tangent. Elle se compose d'une infinité de branches superposables, ayant chacune pour base une partie de la droite égale à la circonférence du cercle mobile.

Prenons la droite donnée pour axe des x, et l'origine en un quelconque des points où elle est rencontrée par la courbe. Soient B (*fig.* 1) le point de contact du cercle générateur avec l'axe des x, et l'arc MB égal à AB; le point M appartiendra à la cycloïde. Désignons par ω l'angle MOB qui pourra prendre toutes les valeurs depuis 0 jusqu'à $\pm\infty$; il est facile d'établir les équations suivantes, dans lesquelles a désigne le rayon du cercle :

$$x = a(\omega - \sin\omega), \quad y = a(1 - \cos\omega).$$

Ces équations ont lieu dans toute l'étendue de la courbe. L'équation entre x et y sera

$$x = a \operatorname{arc} \cos \frac{a - y}{a} - \sqrt{2ay - y^{2}};$$

mais il faudra avoir soin de changer alternativement le signe du radical dans les deux moitiés de chacune des branches successives. Différentiant ces équations, on

aura

$$dx = a(1-\cos\omega)\,d\omega = y\,d\omega, \quad dy = a\sin\omega\,d\omega,$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a-y}{y}},$$

$$y - y' = \sqrt{\frac{2a-y'}{y'}}\,(x - x'), \text{ équation de la tangente;}$$

$$y - y' = -\sqrt{\frac{y'}{2a-y'}}\,(x - x'), \text{ équation de la normale;}$$

$$S_t = y'\sqrt{\frac{y'}{2a-y'}}, \quad S_n = \sqrt{2ay' - y'^2} = \text{BP},$$

$$T = y'\sqrt{\frac{2a}{2a-y'}}, \quad N = \sqrt{2ay'} = \text{MB}.$$

La valeur de S_n ou de N prouve que la ligne MB est la normale, et, par suite, que la tangente est MC.

Formules analogues en coordonnées polaires.

113. Soit l'équation $F(\theta, r) = 0$ entre les coordonnées polaires θ et r, et proposons-nous de déterminer la tangente au point M (*fig.* 2) de la courbe qu'elle représente. Pour cela, cherchons l'angle μ que fait cette tangente avec le rayon vecteur OM; le triangle KMN donne

$$\frac{\text{KM}}{\text{KN}} = \frac{\sin \text{N}}{\sin \text{KMN}},$$

d'où, en passant aux limites,

$$\frac{r\,d\theta}{dr} = \tang\mu = \frac{r}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)}.$$

La sous-tangente et la sous-normale se rapportent à la perpendiculaire au rayon vecteur, menée par le pôle. On

trouvera immédiatement les formules suivantes :

$$S_t = r \operatorname{tang} \mu = \frac{r^2}{\frac{dr}{d\theta}}, \quad S_n = \frac{dr}{d\theta},$$

$$T = r\sqrt{1 + r^2 \frac{d\theta^2}{dr^2}}, \quad N = \sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}.$$

Appliquons ces formules à quelques exemples.

114. Soit d'abord la spirale d'Archimède :

$$r = a\theta, \quad \operatorname{tang} \mu = \theta, \quad S_n = a.$$

On voit que la sous-normale est constante et que la courbe, tangente à l'axe, au pôle, tend de plus en plus à être perpendiculaire au rayon vecteur.

Soit maintenant l'équation $r = \frac{a}{\theta}$ de la spirale hyperbolique :

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{a}{\theta^2}, \quad \operatorname{tang} \mu = -\theta, \quad S_t = -a.$$

Ainsi, dans cette courbe, c'est la sous-tangente qui est constante.

Considérons encore la spirale logarithmique dont l'équation est

$$r = a e^{m\theta}, \quad \frac{dr}{d\theta} = ma e^{m\theta},$$

$$\operatorname{tang} \mu = \frac{1}{m}, \quad S_t = \frac{r}{m}, \quad S_n = mr,$$

$$T = r\frac{\sqrt{1 + m^2}}{m}, \quad N = r\sqrt{1 + m^2}.$$

La valeur de tang μ montre que le rayon vecteur est toujours également incliné sur la tangente.

Les valeurs de S_t et S_n prouvent que les extrémités de la

normale et de la tangente décrivent des spirales identiques avec la première, et semblablement situées par rapport à des axes différents passant par le même pôle.

Les mêmes formules s'appliquent très-simplement aux sections coniques.

Théorie des asymptotes.

115. On appelle *asymptote d'une branche de courbe infinie* une droite telle, que les points de cette courbe s'en approchent indéfiniment sans jamais la rencontrer, à mesure qu'ils s'éloignent indéfiniment sur la branche que l'on considère.

Toute asymptote non parallèle à l'axe des y aura une équation de la forme

$$y = kx + l,$$

k et l ayant des valeurs finies.

La branche de courbe aura pour équation

$$y = kx + l + V,$$

V étant une fonction connue ou inconnue de x, mais qui tend vers zéro à mesure que x augmente. On en déduit $k = \lim \frac{y}{x}$, $l = \lim(y - kx)$. Réciproquement, des valeurs de k et l ainsi déterminées pour une branche réelle de courbe correspondront nécessairement à une asymptote de cette branche, puisque $y - kx - l$ a pour limite zéro, pour les points de cette branche dont l'x croît indéfiniment.

Les asymptotes parallèles à l'axe des x correspondront aux valeurs de k égales à zéro. Pour trouver les asymptotes parallèles à l'axe des y, on considérerait l'équation $x = k'y + l'$ et l'on ne s'occuperait que des valeurs de k' égales à zéro.

116. Appliquons ces considérations à une courbe dont l'équation peut se partager en plusieurs parties homogènes par rapport à x, y, et peut être mise, par conséquent, sous la forme suivante, où nous supposerons les exposants de x décroissants :

$$x^m F\left(\frac{y}{x}\right) + x^n f\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots = 0.$$

Soit $\frac{y}{x} = p$, d'où $y = px$; il faudra d'abord trouver la limite de p pour $x = \infty$.

La substitution donne

$$x^m F(p) + x^n f(p) + \ldots = 0,$$

d'où

$$F(p) + \frac{1}{x^{m-n}} f(p) + \ldots = 0;$$

et à mesure que x augmente, $F(p)$ s'approche de zéro : donc les valeurs limites de p, c'est-à-dire les valeurs de k, sont des racines réelles de l'équation

$$F(k) = 0.$$

Il reste à trouver la valeur de l correspondante à une valeur de k; pour cela on posera $y - kx = t$, et l'on cherchera la limite de t.

L'équation de la courbe devient, par cette substitution,

$$x^m F\left(k + \frac{t}{x}\right) + x^n f\left(k + \frac{t}{x}\right) + \ldots = 0;$$

mais puisque $F(k) = 0$, on a

$$F\left(k + \frac{t}{x}\right) = \frac{t}{x} F'\left(k + \theta\frac{t}{x}\right),$$

θ étant compris entre 0 et $+1$; on a donc

$$x^{m-1} t F'\left(k + \theta\frac{t}{x}\right) + x^n f\left(k + \frac{t}{x}\right) + \ldots = 0,$$

ou

$$tF'\left(k+\theta\frac{t}{x}\right)+\frac{1}{x^{m-n-1}}f\left(k+\frac{t}{x}\right)+\ldots=0.$$

Si $m=n+1$, $x=\infty$ donnera pour limite de t, c'est-à-dire pour valeur de l,

$$l=-\frac{f(k)}{F'(k)}.$$

Si $m>n+1$, on a

$$l=0.$$

Si $m<n+1$, t n'a pas de limite, et il n'y a pas d'asymptote pour cette valeur de k. Ainsi, en général, l'équation de l'asymptote sera $y=kx-\frac{f(k)}{F'(k)}$, $f(k)$ se rapportant aux termes de degré $m-1$, et devenant nulle si $n<m-1$: il n'y a pas d'asymptote si $n>m-1$.

Si $n<m-1$, l'équation de l'asymptote est de la forme $y-kx=0$.

Si, dans le cas de $n=m-1$, la valeur de k tirée de $F(k)=0$ satisfaisait aux équations $F'(k)=0, f(k)=0$, l'équation de l'asymptote devieudrait indéterminée; et l'on ne pourrait en tirer l'équation cherchée, parce que le terme en x^{m-2} devient du même ordre que les deux premiers, et ne peut plus être négligé.

Dans ce cas, l'équation qui détermine la limite de t se mettrait sous cette forme

$$\frac{x^{m-2}t^2}{1.2}F''\left(k+\theta\frac{t}{x}\right)+x^{m-2}tf'\left(k+\theta_1\frac{t}{x}\right)$$
$$+x^{m-2}\varphi\left(k+\frac{t}{x}\right)+\ldots=0,$$

$x^{m-2}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ étant le troisième terme de l'équation proposée.

Divisant par x^{m-2} et passant à la limite, l sera déter-

miné par l'équation

$$l^2 \frac{F''(k)}{2} + lf'(k) + \varphi(k) = o.$$

On agirait semblablement si ces trois nouvelles fonctions devenaient nulles, pour cette valeur particulière de k.

Si $n < m - 1$, et $F'(k) = o$, on n'a plus nécessairement $l = o$.

117. Si la courbe est rapportée à des coordonnées polaires, on connaîtra toutes les directions qui peuvent donner des asymptotes, en cherchant toutes les valeurs de θ qui donnent à r une valeur infinie.

Soit α une de ces valeurs de θ, on cherchera la limite de $r\sin(\theta - \alpha)$ qui est l'expression de la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de la courbe sur la droite menée par le pôle sous l'angle α avec l'axe. Cette limite sera la distance de cette droite à l'asymptote, et le signe dont elle sera affectée fera connaître de quel côté elle se trouve. Si le produit $r\sin(\theta - \alpha)$ croît indéfiniment, il n'y a pas d'asymptote dans cette direction.

On trouvera le même résultat en cherchant la limite de $r(\theta - \alpha)$ ou celle de $r\sin(\theta - \alpha)$, puisque la limite de $\frac{\sin(\theta - \alpha)}{\theta - \alpha}$ est l'unité.

118. Soit pour exemple l'équation générale

$$F(\theta)r^m + f(\theta)r^{m-1} + A_2 r^{m-2} + \ldots + A_m = o,$$

$A_2, A_3, \ldots, A_m$ étant des fonctions quelconques de θ. L'équation $F(\theta) = o$ fera connaître toutes les directions possibles des asymptotes. Soit α une des racines réelles de cette équation et $\theta = \alpha + \delta$; puisque $F(\alpha) = o$, on aura $F(\alpha + \delta) = \delta F'(\alpha + \theta\delta)$, et l'équation de la courbe devient alors, en divisant par r^{m-1},

$$r\delta . F'(\alpha + \theta\delta) + f(\alpha + \delta) + \ldots = o.$$

Lorsque r devient infini, il ne reste plus que les deux premiers termes, et l'on trouve

$$\lim r(\theta - \alpha) = \lim r\delta = -\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}.$$

Si l'on avait $f(\alpha) = 0$, $F'(\alpha) = 0$, on agirait comme dans le cas précédent.

119. Soit proposé de trouver les asymptotes de la courbe ayant pour équation

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0;$$

on a, dans ce cas,

$$F(k) = ak^2 + bk + c,$$
$$f(k) = dk + e.$$

$k = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, ce qui exclut l'ellipse.

L'équation de ces asymptotes devient

$$y = kx - \frac{dk + e}{2ak + b}.$$

Le dernier terme devient infini dans le cas de la parabole, et, par conséquent, l'hyperbole est la seule courbe du second degré qui ait des asymptotes.

120. Soit maintenant $y = ae^{mx}$, équation de la logarithmique, qui ne rentre pas dans la classe générale considérée ci-dessus, parce que e^{mx} n'est pas d'un degré fini par rapport à x.

On cherchera toujours la limite de $\frac{y}{x}$, et ensuite celle de $y - kx$.

On trouve immédiatement $k = 0$; ensuite la limite de y est zéro, et correspond aux x négatifs. L'asymptote est donc l'axe des x, et dans la direction seule des x négatifs.

121. Dans le cas de la courbe, appelée *folium de*

Descartes, et dont l'équation est

$$y^3 + x^3 - 3axy = 0,$$

on trouvera une asymptote ayant pour équation

$$y = - x - a.$$

122. L'équation $y^2 = \cos\frac{y}{x}$ conduit à $k = 0, l = \pm 1$.
La courbe a donc pour asymptotes les deux droites

$$y = + 1, \quad y = - 1.$$

123. L'équation $y = a\frac{\sin x}{x}$ représente une courbe qui a l'axe des x pour asymptote, et qui a cela de remarquable, qu'elle passe alternativement d'un côté et de l'autre de son asymptote, jusqu'à l'infini.

124. L'équation $y = a \sin\frac{b}{x}$ donnera encore $y = 0$ pour l'équation d'une asymptote.

Elle offre en outre une particularité remarquable : elle s'approche indéfiniment de l'axe des y dans la partie comprise entre $y = -a, y = +a$. C'est donc là un véritable asymptotisme, puisque la longueur de la courbe augmente sans limite, en se rapprochant indéfiniment d'une droite fixe.

Cette courbe ne diffère pas de celle qu'on obtiendrait en enveloppant sur un cylindre une hyperbole équilatère dont une asymptote serait parallèle au plan de la base, et projetant la courbe résultante sur un certain plan passant par l'axe du cylindre.

125. Soit maintenant l'équation polaire d'une hyperbole, par rapport à un de ses foyers,

$$(a - c\cos\theta)\, r = b^2, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2};$$

on trouvera

$$\cos\alpha = \frac{a}{c},\ \lim r\delta = b.$$

Les deux asymptotes se trouveront ainsi déterminées.

126. Soit encore la spirale hyperbolique

$$(\theta - \omega)\, r = a\,;$$

on trouvera

$$\alpha = \omega,\quad \lim r\delta = a.$$

127. *Des asymptotes considérées comme limites des tangentes.* — En partant de l'équation ci-dessus

$$x^m F\left(\frac{y}{x}\right) + x^n f\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots = 0, \tag{1}$$

qui renferme non-seulement toutes les courbes algébriques, mais encore toutes celles dont les termes ont des degrés déterminés par rapport à x et y, on arrive à une propriété remarquable des asymptotes, qui consiste en ce qu'elles peuvent être considérées comme limites des tangentes à la branche de courbe à laquelle elles se rapportent.

Nous pouvons supposer à l'axe des y une direction arbitraire, et alors $\frac{y}{x}$ tendra vers une limite finie k qui sera racine de l'équation

$$F(k) = 0.$$

Cela posé, soit $\varphi(x, y)$ le premier membre de l'équation (1), on aura

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi'(x)}{\varphi'(y)},$$

$$\varphi'(x) = -\frac{y}{x^2}\left[x^m F'\left(\frac{y}{x}\right) + x^n f'\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots\right] + m x^{m-1} F\left(\frac{y}{x}\right) + n x^{n-1} f\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots,$$

$$\varphi'(y) = \frac{1}{x}\left[x^m F'\left(\frac{y}{x}\right) + x^n f'\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots\right],$$

d'où l'on tire

$$(2)\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\frac{mx^{m-1}F\left(\frac{y}{x}\right)+nx^{n-1}f\left(\frac{y}{x}\right)+\ldots}{x^{m-1}F'\left(\frac{y}{x}\right)+x^{n-1}f'\left(\frac{y}{x}\right)+\ldots}.$$

Or, si l'on fait croître x indéfiniment, $F\left(\frac{y}{x}\right)$ tendra vers zéro, et l'équation (2) donnera

$$(3)\qquad \lim\frac{y}{x}=\lim\frac{dy}{dx}.$$

Ainsi d'abord, lorsqu'une branche de courbe a une asymptote, sa direction est la limite de celles des tangentes à cette même branche.

Cherchons maintenant la limite du point où la tangente rencontre l'axe des y, et dont l'ordonnée est $y-x\frac{dy}{dx}$.

L'équation (2) donne

$$(4)\qquad y-x\frac{dy}{dx}=\frac{mxF\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{n}{x^{m-n-1}}f\left(\frac{y}{x}\right)+\ldots}{F'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x^{m-n}}f'\left(\frac{y}{x}\right)+\ldots}.$$

Supposons d'abord $n=m-1$ ou $n<m-1$, auquel cas la branche de courbe aura une asymptote; on aura alors

$$(5)\qquad y-x\frac{dy}{dx}=\frac{mxF\left(\frac{y}{x}\right)+(m-1)f\left(\frac{y}{x}\right)+\ldots}{F'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)+\ldots}.$$

Or cette expression peut être simplifiée au moyen de l'équation (1). En effet, en divisant cette dernière par x^{m-1} et supposant d'abord $n=m-1$, on obtient, en faisant

croître x indéfiniment,

$$\lim\left[x\mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right)+f\left(\frac{y}{x}\right)\right]=0.$$

L'équation (5) donne ainsi

$$\lim\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)=\lim\frac{-f\left(\frac{y}{x}\right)+\ldots}{\mathrm{F}'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)+\ldots},$$

et, par suite,

$$\lim\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)=-\frac{f(k)}{\mathrm{F}'(k)};$$

donc la tangente coupe l'axe des y en un point dont la limite coïncide avec celui où ce même axe est coupé par l'asymptote.

Si l'on avait $n<m-1$, la fonction f n'existerait pas, et l'on trouverait

$$\lim\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)=0.$$

L'asymptote et la limite des tangentes passeraient alors par l'origine.

Supposons enfin $n>m-1$, alors la branche de courbe infinie n'a pas d'asymptote. Faisons $n=m-1+\delta$; l'équation (1), divisée par x^n, donnera

$$\lim\left[x^{1-\delta}\mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right)+f\left(\frac{y}{x}\right)\right]=0;$$

et, en introduisant cette condition dans l'équation (4), on trouvera que $y-x\dfrac{dy}{dx}$ deviendra infini avec x, et, par conséquent, qu'il n'y a pas de limite pour le point de rencontre de la tangente avec l'axe des y.

On arrivera donc, dans tous les cas, au même résultat, soit en cherchant l'asymptote d'une branche infinie, soit en cherchant la limite des tangentes.

Mais il faut bien remarquer que nous entendons ici, par limite des tangentes, la droite qui, menée sous l'inclinaison limite, coupe l'un des axes, celui des y par exemple, au point limite où cet axe est coupé par la tangente variable. Ce ne serait pas déterminer une droite, que de dire simplement qu'elle est la limite d'une droite mobile qui ne reste pas toujours parallèle à elle-même. En effet, cette droite est située de la même manière par rapport à des droites parallèles entre elles, quoiqu'elle les coupe en des points qui peuvent être fort éloignés les uns des autres; et si elle s'approche indéfiniment de l'une de ces parallèles, elle s'approche également des autres, à partir des points respectifs où elle les coupe.

La démonstration que nous venons de donner se déduit si simplement de la forme de l'équation (1) pour laquelle nous avions calculé l'équation générale des asymptotes, que nous avons cru ne pas devoir l'omettre. Mais précisément parce qu'elle est fondée sur cette forme, elle n'a pas toute la généralité qu'on pourrait désirer, et nous allons traiter la question, indépendamment de toute forme particulière d'équation.

128. *Une asymptote est, en général, la limite des tangentes.* — Considérons une branche infinie de courbe quelconque ayant une asymptote AX (*fig.* 3); cette courbe n'étant pas donnée par une équation, il est nécessaire d'en connaître certaines conditions géométriques bien déterminées, sur lesquelles le raisonnement puisse se fonder. Nous admettrons, comme seule définition de cette courbe, qu'elle est telle, que depuis un certain point B jusqu'à l'infini, ses points aillent constamment en s'approchant de AX, et que l'inclinaison de sa

tangente sur AX varie toujours dans le même sens. Il est d'abord évident que depuis le point B la courbe est convexe vers AX; car la tangente en un point quelconque rencontrera AX au delà de son point de contact, puisque les distances à AX vont en diminuant de ce côté : si donc la courbe était concave vers AX, et, par suite, comprise entre AX et sa tangente, elle couperait AX, ce qui est contre l'hypothèse.

Cela posé, menons une droite fixe quelconque AY; prenons sur cette droite un point P plus rapproché de AX que ne l'est le point B, et menons la droite indéfinie PU parallèle à AX. Elle coupera nécessairement la courbe en un seul point M, qui sera d'autant plus éloigné de AY que AP sera plus petit.

Si maintenant on joint le point P successivement aux différents points de la courbe situés au delà de M, cette droite coupera nécessairement AX, et, par conséquent, rencontrera auparavant la courbe en un second point. Cette sécante, tournant continuellement autour de P, deviendra tangente dans une position unique PQ, et le point de contact N sera au delà de M. Or les tangentes aux points situés au delà de N couperont nécessairement PQ entre N et Q, et AX au delà de Q; elles couperont donc AY entre A et P; et comme PA peut être supposé aussi petit qu'on voudra, il s'ensuit que les tangentes à la courbe couperont AY en des points qui iront constamment en s'approchant de A, et que leur distance à ce point a pour limite zéro. Comme d'ailleurs l'angle qu'elles font avec AX a zéro pour limite, on peut énoncer la proposition suivante, qu'il faut entendre avec les restrictions indiquées ci-dessus :

Lorsqu'une branche infinie a une asymptote, les tangentes à cette branche coupent une droite fixe non parallèle à l'asymptote, en des points qui ont une limite

à mesure que le point de contact s'éloigne indéfiniment; leur direction a de même une limite, et si l'on mène par le point limite une droite dans cette dernière direction, elle coïncidera avec l'asymptote.

129. Si les conditions géométriques que nous avons admises n'existaient pas, il serait possible que la branche de courbe eût une asymptote, et que les tangentes n'eussent pas de limite.

En effet, si l'inclinaison de la courbe ne variait pas toujours dans le même sens, les tangentes aux points situés au delà de N pourraient ne pas couper PQ entre P et Q, et, par suite, AY entre P et A; rien ne prouverait alors que leur point de rencontre avec AY aurait une limite, et il est même facile de trouver des cas où cela n'a pas lieu.

Soit, par exemple, l'équation

$$y = \frac{a + \sin x}{x^m},$$

m étant positif et $a > 1$. La courbe est tout entière au-dessus de l'axe des x; de plus, elle s'en approche indéfiniment, et, par conséquent, cet axe en est une asymptote. Cherchons maintenant le point où la tangente coupe l'axe des y. Son ordonnée $y - x\frac{dy}{dx}$ a la même limite que $-x\frac{dy}{dx}$, puisque l'ordonnée y du point de contact tend vers zéro. Mais on a

$$x\frac{dy}{dx} = x^{1-m}\cos x - \frac{m(a + \sin x)}{x^m},$$

expression dont le dernier terme tend vers zéro. Il reste donc à trouver la limite de $x^{1-m}\cos x$. Or cette limite est zéro lorsque l'on a $m > 1$, et alors la tangente a une limite, qui se confond avec l'asymptote. Mais si l'on a

$$m = 1, \quad \text{ou} \quad m < 1,$$

$x\frac{dy}{dx}$ sera indéterminé; il pourra avoir toutes les valeurs comprises entre deux limites finies dans le premier cas, et infinies dans le second. D'où l'on voit qu'*une branche de courbe peut avoir une asymptote, sans qu'il existe une limite pour ses tangentes.*

Il est bon de remarquer que la tangente, considérée à partir de son point de contact, tendrait indéfiniment vers l'axe des x, parce que y et $\frac{dy}{dx}$ tendent vers zéro; mais si on la prolonge jusqu'à l'axe des y, elle s'écarte de l'axe des x, de quantités finies, ou même croissant indéfiniment, comme nous venons de le démontrer. Or, dans ce cas, on dit qu'une droite n'a pas de limite, parce que c'est toujours à l'origine et aux axes fixes qu'on la rapporte.

130. *Toute limite des tangentes est asymptote.* — Cette réciproque de la proposition précédente peut être démontrée comme il suit.

Soit X'X (*fig.* 4) une droite vers laquelle convergent les tangentes à une branche de courbe infinie: et par là nous entendons que ces tangentes font avec X'X un angle qui tend vers zéro à mesure que les points de contact s'éloignent indéfiniment; et que si par un point A pris sur X'X, on mène un axe fixe AY, il est coupé par la tangente variable en un point dont la limite est A.

Considérons maintenant une tangente quelconque PQ: il est admis qu'à partir d'une certaine position du point de contact jusqu'à l'infini, le point P va en se rapprochant indéfiniment de A, et que l'angle AQP tend vers zéro, ces deux quantités conservant leurs signes, ou en changeant d'une manière quelconque. Or il est évident que si le point de contact M est toujours situé dans la partie PQ de la tangente, quel que soit l'angle des axes dans lequel elle se trouve, sa distance MT à X'X est moindre

que PA, et, par conséquent, il s'approche indéfiniment de X'X, puisque la limite de PA est zéro par hypothèse. Donc, dans ce cas, la ligne X'X est une asymptote.

Ce cas est celui qui aura lieu, par exemple, lorsqu'à partir d'une certaine position de la tangente, le point Q ira toujours en s'éloignant, et le point P en se rapprochant de A; car les intersections successives des tangentes se feront toujours dans l'angle YAX, et, par suite, les limites de ces points, ou les points même de la courbe, y seront renfermés.

Il reste donc à considérer le cas où le point de contact serait en dehors de la partie PQ. Or nous allons démontrer que la tangente ne pourrait alors avoir pour limite X'X, à moins que les points de cette branche de courbe ne s'approchent indéfiniment de cette même ligne X'X, qui sera par conséquent encore une asymptote.

Concevons, en effet, une branche de courbe infinie dont l'ordonnée ne tende pas vers zéro, et dont la tangente fasse avec l'axe AX (*fig.* 5) un angle ayant zéro pour limite.

L'ordonnée pourra croître indéfiniment ou rester limitée: dans ce dernier cas, elle pourra tendre vers une valeur determinée; elle pourra même osciller entre des limites déterminées, de telle sorte que, quelque grand que soit x, la courbe reste, ou du moins revienne, à certains intervalles, au-dessus d'une parallèle située à une distance finie de AX. Or nous allons démontrer que, dans ces différentes hypothèses, AX ne peut être la limite des tangentes.

En effet, supposons d'abord que l'ordonnée croisse indéfiniment, et menons à AX une parallèle CV, à une distance AC aussi grande que l'on voudra de AX; cette parallèle rencontrera nécessairement la courbe en un certain point M, et la distance CM pourra dépasser toute grandeur donnée. Si maintenant par le point C

et un point M′ de la courbe, situé au-dessus de CV à une distance aussi petite qu'on voudra de M, on fait passer une ligne droite, on sait que, quelque petit que soit l'angle qu'elle fera avec AX, elle finira par rencontrer la courbe en un second point au delà de MM′, puisque l'angle de la tangente à la courbe avec AX tend vers zéro. Donc, en faisant tourner cette droite dans le même sens, elle finira par devenir tangente en un point situé au delà de M. Donc, en prenant des points assez éloignés sur la courbe la tangente coupera AY en des points C situés à des distances aussi grandes qu'on voudra de A. Donc enfin les tangentes n'ont pas pour limite AX.

Supposons maintenant que l'ordonnée ne croisse pas indéfiniment, et que les points de la courbe restent constamment au-dessus d'une droite BU menée parallèlement à AX à une distance déterminée différente de zéro, ou bien passent au-dessus et au-dessous de BU à des intervalles quelconques: Considérons un point M de la courbe situé au-dessus de BU à une distance de AY plus grande qu'une quantité donnée quelconque, et menons, par ce point, MD parallèle à AX (*fig.* 6). En raisonnant comme dans le cas précédent, nous démontrerions qu'il existe une tangente en un point situé sur la courbe, au delà de M, et rencontrant AY en D, et, par conséquent, au-dessus de B; d'où il suit que AX n'est pas la limite des tangentes.

Donc enfin AX ne serait pas la limite des tangentes si les points de la courbe étaient situés en dehors de la partie de la tangente comprise entre les deux axes, et qu'en même temps leur distance à AX ne tendît pas vers zéro. Mais si cette distance tend vers zéro, AX est asymptote. D'où il résulte enfin que, quelque part que soit situé le point de contact sur la tangente variable, si cette droite tend vers une limite, dans le sens précédemment défini, *cette limite est une asymptote.*

Différentielles de l'arc, de l'aire et de l'inclinaison d'une courbe plane.

131. On ne peut attacher un sens précis à la longueur d'une courbe, qu'en donnant ce nom à la limite vers laquelle tend le périmètre d'un polygone inscrit dans cette courbe, à mesure que ses côtés tendent vers zéro.

Mais il faut démontrer que cette limite existe et est unique, quelle que soit la loi suivant laquelle les côtés de ce polygone tendent vers zéro.

Pour cela, concevons d'abord qu'il n'y ait que deux cordes inscrites dans l'arc entier que l'on considère; puis inscrivons-en deux dans chacune des deux subdivisions de cet arc, et de même deux dans chacune des nouvelles subdivisions, et ainsi de suite indéfiniment, de sorte que le nombre des côtés soit exprimé par la formule 2^n, n croissant indéfiniment. Le périmètre croîtra constamment; et comme on peut facilement assigner une quantité finie au-dessous de laquelle il reste toujours, il tendra évidemment vers une certaine limite. Il reste à démontrer que tout autre mode de division de l'arc conduirait à la même limite.

Considérons, en effet, deux polygones inscrits ayant les côtés extrêmement petits, l'un appartenant à la série que nous venons de désigner, et le second, à toute autre loi; menons des ordonnées par tous les sommets de l'un et de l'autre: les deux périmètres seront partagés par ces ordonnées en un même nombre de parties, et celles qui sont comprises entre deux ordonnées consécutives ont un rapport d'autant plus près de l'unité, que les côtés seront plus petits; car leurs directions différeront infiniment peu de celle de la tangente voisine. D'où il suit que le rapport des deux périmètres tend indéfiniment vers l'unité à me-

sure que les côtés tendent vers zéro. La limite obtenue par le premier mode de subdivision est donc la même que pour tout autre.

Il est bon d'observer qu'on trouverait encore la même limite si les sommets du polygone n'étaient pas sur la courbe même, mais en étaient infiniment voisins, et que les côtés eussent toujours pour limites de leurs directions celles des tangentes aux points infiniment voisins. On pourrait encore considérer des polygones circonscrits à la courbe; on pourrait même prendre une suite de lignes séparées les unes des autres. Imaginons, par exemple, des parallèles qui coupent l'arc de courbe et soient infiniment voisines les unes des autres; si par chaque point de division on mène une tangente, la suite discontinue des portions de ces tangentes comprises entre le point de contact et la parallèle voisine, aura évidemment la même limite que le périmètre inscrit. On trouverait encore bien d'autres manières de parvenir à la même limite par des sommes de lignes droites la seule condition nécessaire est que ces sommes et les périmètres inscrits se composent d'éléments correspondants dont le rapport ait l'unité pour limite.

D'après notre définition de la longueur des courbes, on reconnaîtra facilement que toute courbe convexe fermée est moindre que les lignes qui l'enveloppent; et que si l'on n'en considère qu'un arc, il est moindre que toute ligne qui l'enveloppe, et est terminée aux mêmes points.

Il est facile de voir aussi que la limite du rapport d'un arc infiniment petit à sa corde est l'unité, et que, par conséquent, on peut prendre pour accroissement infiniment petit d'un arc la corde qui soutend l'accroissement infiniment petit de cet arc.

Désignant par s la longueur de l'arc, on aura donc ainsi

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} + \omega = \Delta x \sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}} + \omega,$$

ω étant infiniment petit par rapport à Δs; on en déduit

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}, \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Dans un système de coordonnées polaires on aura

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}, \quad \text{ou} \quad ds = \sqrt{r^2 d\theta^2 + dr^2}.$$

132. L'aire comprise entre deux ordonnées, l'axe des x et l'arc d'une courbe, croît d'une quantité comprise entre deux parallélogrammes dont la limite du rapport est l'unité, à mesure que Δx tend vers zéro : on peut donc prendre l'un quelconque des deux au lieu de l'accroissement même de l'aire, sans altérer la limite du rapport à Δx. Si donc on désigne l'aire par A, on aura

$$\frac{dA}{dx} = y \sin\theta, \quad \text{ou} \quad dA = y\,dx \sin\theta,$$

θ désignant l'angle des axes.

Dans un système de coordonnées polaires, les deux parallélogrammes seront remplacés par des secteurs semblables, et l'on trouvera

$$\frac{dA}{d\theta} = \frac{r^2}{2}, \quad \text{ou} \quad dA = \tfrac{1}{2} r^2 d\theta.$$

133. L'inclinaison φ de la tangente sur l'axe des x est déterminée par l'équation

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{dy}{dx};$$

d'où

$$\frac{d\varphi}{dx} = \cos^2\varphi \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{1 + \dfrac{dy^2}{dx^2}},$$

ou

$$d\varphi = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}\,dx}{1+\frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Cette valeur de $d\varphi$ est ce que nous nommerons *angle de contingence;* il peut être pris pour $\Delta\varphi$, qui est celui des deux tangentes aux points dont les abscisses diffèrent de dx, sans que les limites des rapports soient altérées.

Dans un système de coordonnées polaires, l'angle de deux tangentes consécutives, ou la différence infiniment petite de l'inclinaison φ de la tangente sur l'axe fixe, est égal à l'angle des deux rayons vecteurs correspondants, plus l'accroissement de l'inclinaison de la tangente sur le rayon qui passe au point de contact. On trouvera ainsi

$$d\varphi = \frac{r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{r^2+\frac{dr^2}{d\theta^2}}\,d\theta.$$

Concavité et convexité.

134. On dit qu'une courbe est concave en un de ses points par rapport à une droite donnée, lorsque, à partir de ce point, ses deux branches commencent par être comprises dans l'angle aigu formé par la droite donnée et la tangente à la courbe au point que l'on considère. Lorsque, au contraire, les deux branches commencent par être en dehors de cet angle, on dit que la courbe est convexe en ce point par rapport à la droite.

Nous allons faire connaître les caractères analytiques qui correspondent à ces deux circonstances, en supposant qu'on ait pris la droite donnée pour axe des x. Dans le cas de la concavité, l'ordonnée orthogonale de la courbe

doit être moindre en grandeur absolue que celle de la tangente au point que l'on considère, pour les valeurs de x infiniment voisines de celle qui correspond à ce point. Ainsi l'ordonnée de la courbe sera plus petite que celle de la tangente lorsqu'elle sera positive, et plus grande lorsqu'elle sera négative. L'inverse aura lieu pour la convexité.

Or, en désignant par x', y' les coordonnées du point donné, et par h une quantité positive ou négative, qui peut devenir moindre que toute quantité donnée, on a pour les points de la courbe,

$$y = y' + \frac{dy'}{dx'}h + \frac{h^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x'+\theta h},$$

et pour la tangente au point (x', y'),

$$y = y' + \frac{dy'}{dx'}h;$$

donc, si y' est positive, la courbe sera concave si le terme $\frac{h^2}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x'+\theta h}$ est négatif, et convexe s'il est positif. Or, si l'on n'a pas $\frac{d^2y'}{dx'^2} = 0$, le signe du terme en question sera le même que celui de $\frac{d^2y'}{dx'^2}$; donc, dans ce cas, pour les points de la courbe qui sont du côté des y positifs, la condition de concavité est $\frac{d^2y'}{dx'^2} < 0$, et la condition de convexité est $\frac{d^2y'}{dx'^2} > 0$. C'est l'inverse pour les points situés du côté des y négatifs.

Si $\frac{d^2y'}{dx'^2} = 0$, il faudra que l'on ait $\frac{d^3y'}{dx'^3} = 0$ pour que les deux branches de la courbe soient d'un même côté de la tangente dans le voisinage du point que l'on considère.

et c'est au signe de $\frac{d^4y'}{dx'^4}$ qu'on reconnaîtra la concavité ou la convexité. De même, si $\frac{d^4y'}{dx'^4} = 0$, il faudra qu'on ait $\frac{d^5y'}{dx'^5} = 0$, et ainsi de suite.

Points singuliers.

135. Lorsque la concavité se change en convexité, $\frac{d^2y}{dx^2}$ doit changer de signe et, par conséquent, passer par zéro ou l'infini; les points où s'opère ce changement se nomment *points d'inflexion.*

Mais il ne suffit pas que $\frac{d^2y}{dx^2}$ soit nul pour qu'il y ait inflexion; car il faut, pour qu'il change de signe, que $\frac{d^3y}{dx^3}$ ne soit pas nul, ou que $\frac{d^4y}{dx^4}$ le soit en même temps, et ainsi de suite. De même, si $\frac{d^2y}{dx^2}$ est infini, il faudra s'assurer s'il change de signe.

136. *Points multiples.* — On appelle ainsi ceux où passent plusieurs branches de courbe, et où l'on peut mener, par conséquent, plusieurs tangentes. On peut les déterminer par des règles très-simples ponr toutes les courbes algébriques. Soit $F(x, y) = 0$ une équation algébrique et rationnelle; on en tirera

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{1}$$

Or, cette équation devant être satisfaite par plusieurs valeurs de $\frac{dy}{dx}$, tandis que $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$ n'en auraient qu'une seule, on devra avoir $\frac{dF}{dx} = 0$, $\frac{dF}{dy} = 0$, conjointement avec

$F(x, y) = 0$. Si l'on trouve des solutions réelles communes à ces équations, les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ seront données par l'équation

$$\frac{d^2F}{dx^2} + 2\frac{d^2F}{dxdy}\frac{dy}{dx} + \frac{d^2F}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

que l'on obtient en différentiant l'équation (1), et remplaçant ensuite $\frac{dF}{dx}$ et $\frac{dF}{dy}$ par zéro.

Si trois branches passaient au même point, les coefficients de cette équation seraient encore nuls, et l'on aurait recours à la troisième dérivée de l'équation; et ainsi de suite.

Les deux branches seraient tangentes si deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ étaient égales.

Si l'équation était résolue par rapport à y et renfermait des radicaux à double signe, on reconnaitrait les points multiples en cherchant les valeurs de x qui font disparaitre un de ces radicaux de y, sans le faire disparaitre de $\frac{dy}{dx}$; car en ces points deux branches de courbe se couperont, et leurs tangentes seront différentes.

137. *Points de rebroussement.* — Si en un point multiple deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ sont égales, et que les deux branches s'arrêtent en ce point, on a un point de rebroussement. Il est du premier genre lorsque les deux branches sont de côtés différents de la tangente commune, et du second genre lorsqu'elles sont du même côté. On reconnaitra que les branches s'arrêtent en ce point, lorsqu'en faisant varier x d'un côté seulement, leurs ordonnées deviendront imaginaires. Il faut cependant excepter

le cas où $\frac{dy}{dx}$ serait infini en ce point; on considérerait alors l'abscisse au lieu de l'ordonnée.

Le rebroussement sera du premier genre lorsque $\frac{d^2y}{dx^2}$ sera de signe différent pour les deux branches ; il sera du second, quand ce signe sera le même.

138. *Points conjugués.* — On appelle ainsi des points isolés dont les coordonnées satisfont à l'équation d'une courbe, sans qu'on en puisse supprimer ces solutions. Pour ces points, le Δy doit être imaginaire, et, par suite, le $\frac{dy}{dx}$; c'est à ce caractère qu'on les reconnaîtra.

On peut observer que $\frac{dy}{dx}$, tiré d'une équation du premier degré, ne saurait être imaginaire, et que, par conséquent, les coordonnées des points conjugués satisferont aux équations $\frac{dF}{dx} = 0$, $\frac{dF}{dy} = 0$.

On les trouvera donc en même temps que les points multiples.

139. *Points d'arrêt.* — On donne ce nom à tout point où s'arrête brusquement une branche unique de courbure.

On les déterminera en cherchant les valeurs de x à partir desquelles y commence à devenir imaginaire, s'il était réel auparavant; ou à devenir réel, s'il était imaginaire. Il faudra, de plus, s'assurer qu'il n'y a qu'une seule branche de la courbe à passer en ce point, et que, par conséquent, les valeurs voisines de x ne donnent pas plusieurs valeurs voisines pour y.

140. *Points saillants ou anguleux.* — On appelle ainsi les points où s'arrêtent deux branches de courbe, sans y avoir la même tangente. Ils rentrent dans la classe des points multiples. On les distinguera des points multiples ordinaires, à ce que, comme dans le cas des points

de rebroussement, les deux branches ne se prolongent pas au delà de leur point de rencontre.

Lorsque l'équation d'une courbe ne donne qu'une seule valeur de y pour chaque valeur de x, toute valeur de x qui donnera deux valeurs pour $\frac{dy}{dx}$ déterminera évidemment un point saillant.

141. *Exemples de points singuliers.*

$$a^2y^2 = a^2x^2 + x^4;$$

point multiple, inflexion.

$$y = \sin x,\quad y = \cos x,\quad y = \operatorname{tang} x,\quad y = \frac{\operatorname{tang} x}{x},\quad y = x \operatorname{tang} x;$$

inflexions.

$$y = \varphi(x) + (x - a)^{\frac{2p+1}{2q}} \mathrm{F}(x);$$

rebroussement du premier genre, si l'on a

$$\frac{2p+1}{2q} < 2 \quad \text{et} \quad > 1;$$

du second genre, si l'on a

$$\frac{2p+1}{2q} > 2,$$

en supposant qu'on n'ait pas $\varphi''(x) = 0$.

$$y^2 = x^3,\quad y = x \pm x\sqrt{x},\quad y = x^2 \pm x^2\sqrt{x};$$

cas particuliers de la formule précédente.

$$y = \frac{1}{\log x},\quad y = x \log x;$$

point d'arrêt à l'origine.

$$y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}};$$

point saillant, ou anguleux, à l'origine.

$$y = (x - a)\sqrt{x - b};$$

point conjugué, ayant pour abscisse a, si $a < b$; point multiple, ayant pour abscisse a, si $a > b$.

De la courbure des lignes planes.

142. La courbure d'un arc sans inflexion est l'angle que forment entre elles les directions du premier et du dernier élément de cet arc; c'est l'angle des tangentes extrêmes : il exprime la quantité dont la courbe a successivement dévié de la ligne droite dans l'étendue de cet arc.

Si l'on divise cet angle par la longueur de l'arc, on aura la courbure moyenne de cet arc, rapportée à l'unité de longueur, c'est-à-dire celle que l'on trouverait pour un arc égal à l'unité, si la courbure variait proportionnellement à l'arc, comme dans le cercle, et de manière à obtenir la courbure donnée pour une longueur égale à celle de l'arc dont il s'agit.

Cela posé, si, à partir d'un point quelconque d'une ligne courbe, on prend un arc de grandeur arbitraire, sa courbure moyenne variera à mesure que cet arc diminuera indéfiniment; et elle tendra vers une limite déterminée, qu'on appelle *courbure de la ligne* au point que l'on considère. Cette limite est, pour employer le langage reçu dans le calcul infinitésimal, la courbure d'un arc infiniment petit, rapportée à l'unité de longueur, cet arc commençant au point que l'on considère.

On obtient donc la courbure d'une ligne en un quel-

conque de ses points, en divisant l'angle de contingence par la longueur de l'arc correspondant, et prenant la limite de ce rapport, en faisant tendre l'arc vers zéro. On trouvera ainsi, pour expression de la courbure,

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}.$$

143. Le cercle ayant une courbure constante, il est naturel de le prendre pour terme de comparaison, et de faire connaître la courbure d'une ligne en un de ses points, en donnant le rayon du cercle dont la courbure est la même. Ce cercle se nomme *cercle de courbure*, et son rayon, *rayon de courbure*. Si on le place tangentiellement à la courbe au point que l'on considère, en tournant sa concavité du même côté qu'elle, son centre, considéré relativement à ce point de la courbe, prend le nom de *centre de courbure*.

Or, pour un cercle quelconque la courbure $\frac{d\varphi}{ds}$ est égale à l'unité divisée par son rayon. Si donc on désigne par R le rayon de courbure, on aura

$$R = \frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad \text{ou} \quad R = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

144. Pour obtenir l'expression du rayon de courbure en coordonnées polaires, il suffit de se rappeler les formules

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}, \quad \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}},$$

et l'on trouvera

$$R = \frac{\left(r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}.$$

145. Si pour chaque valeur de l'arc que l'on fait tendre vers zéro, on calcule le rayon du cercle qui donnerait la même courbure pour une longueur égale, il faudra toujours, pour l'obtenir, diviser la longueur de l'arc de la courbe par l'angle des tangentes extrêmes. Donc la limite de ce cercle variable n'est autre chose que le cercle de courbure déjà déterminé.

146. Ce même cercle peut être envisagé sous un autre point de vue.

Soient M (*fig.* 7) un point quelconque de la courbe, MT la tangente, M'N une tangente infiniment voisine, MO et M'O les deux normales correspondantes; les quatre points MNM'O sont sur le même cercle dont le diamètre NO a pour limite la distance du point M à la limite du point de rencontre des deux normales infiniment voisines. L'arc de cercle compris entre M et M' diffère de sa corde, et, par suite, de l'arc MM' de la courbe, d'une quantité infiniment petite par rapport à lui-même; on pourra donc le remplacer par Δs, sans qu'il en résulte aucune erreur dans les limites des rapports.

Mais l'angle inscrit MOM' est égal à l'arc intercepté divisé par le diamètre : il est d'ailleurs égal à TNM' ou $\Delta\varphi$; d'où $\frac{d\varphi}{ds} = \lim \frac{1}{\text{NO}}$.

On voit donc que la limite de NO ou de MO est égale au rayon de courbure; et le *centre de courbure en un point quelconque est la limite du point de rencontre de la normale en ce point avec la normale infiniment voisine.*

147. *Lemme.* — L'angle d'une corde infiniment petite et de la tangente à l'une de ses extrémités peut être regardé comme la moitié de l'angle des tangentes extrêmes. En effet, on a $\sin M : \sin T :: M'T : MM'$ (*fig.* 8) ; et dx désignant l'accroissement infiniment petit de x, on aura, en omettant ce qu'on a le droit de négliger, lorsque l'on a en vue des limites de rapports ou de sommes,

$$M'T = \frac{dx^2}{2} F''(x),$$

$$\sin T = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}}, \quad MM' = dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Donc

$$\sin M = \frac{\frac{dx}{x} F''(x)}{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

ou, en remplaçant le sinus par l'arc,

$$M = \frac{\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dx}{2}}{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

expression qui est la moitié de celle de l'angle de contingence TNM'; ce qu'il fallait démontrer.

Il résulte de là que l'unité est la limite du rapport des angles M, M' du triangle MNM', et, par suite, du rapport des côtés opposés MN, M'N.

148. On obtient encore le cercle de courbure en cherchant la limite des cercles qui passent par le point donné et par deux points de la courbe, qui se rapprochent indéfiniment du premier. Ce cercle limite se nomme *cercle osculateur.*

Il est d'abord évident qu'il aura la même tangente

en M (*fig.* 9) que la courbe, à cause de la sécante commune MM'.

Maintenant, le cercle qui passe par les trois points M, M', M'' passe par le point de rencontre O des perpendiculaires menées, par M, M'', aux cordes MM', M'M''; l'angle inscrit O est égal à l'arc MM'' divisé par le diamètre M'O: on a donc $\frac{O}{MM''} = \frac{1}{M'O}$, et MM'' peut être considéré comme l'arc de la courbe au lieu de l'arc de cercle. Il ne reste plus qu'à calculer l'angle O ou son égal VM'M''.

Or, si l'on mène la tangente HK en M', l'angle TNM'' est égal à la somme de quatre angles infiniment petits appartenant aux triangles MHM', M'KM'' et ayant leurs sommets respectifs en M, M', M''; et comme ils peuvent être regardés comme égaux dans chaque triangle, l'angle TNM'' vaut deux fois la somme des deux angles HM'M et KM'M'', ou deux fois l'angle VM'M'', ou enfin deux fois l'angle O. Ainsi, en négligeant les quantités infiniment petites par rapport à O, on peut prendre $O = \frac{d\varphi}{2}$, MM'' étant la valeur de ds correspondante à $d\varphi$; on aura donc

$$\frac{1}{M'O} = \frac{1}{2}\frac{d\varphi}{ds}.$$

Donc la limite de M'O est le diamètre du cercle de courbure. *Le cercle osculateur ne diffère donc pas du cercle de courbure.*

Comme on n'a fait aucune hypothèse sur la loi que suivent les trois points dans leur rapprochement, on arrivera au même résultat en supposant que les deux premiers points coïncident et que le troisième s'en approche indéfiniment. *Le cercle de courbure est donc encore la limite des cercles tangents à la courbe au point* M, *et qui la*

coupent en un autre point qui s'en rapproche indéfiniment.

Au reste, en traitant directement cette question comme la précédente, on arriverait à la même conséquence.

149. Si l'on prenait pour variable indépendante une quantité quelconque t différente de l'abscisse, on déduirait l'équation suivante des formules générales par lesquelles on opère cette transformation :

$$\mathrm{R} = \frac{\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}, \quad \text{ou} \quad \mathrm{R} = \frac{ds^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

On aurait pu passer ainsi à la valeur de R exprimée en coordonnées polaires, en partant des coordonnées rectangulaires. On aurait trouvé la formule obtenue ci-dessus d'une manière directe.

Appliquons cette transformation au cas où la courbe serait donnée par une équation entre l'ordonnée et l'arc, et prenons l'arc pour variable indépendante; on a

$$\mathrm{R} = \frac{1}{\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}}, \quad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1,$$

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} = 0;$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{R} = \frac{\sqrt{1 - \frac{dy^2}{ds^2}}}{\frac{d^2y}{ds^2}}.$$

Il serait, du reste, très-facile de trouver directement cette dernière formule. On déterminerait l'angle de con-

tingence $d\varphi$, en partant de la formule $\sin\varphi = \frac{dy}{ds}$, d'où

$$\frac{d^2y}{ds^2}ds = \cos\varphi d\varphi = d\varphi\sqrt{1-\frac{dy^2}{ds^2}};$$

donc

$$R = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{\sqrt{1-\frac{dy^2}{ds^2}}}{\frac{d^2y}{ds^2}},$$

formule qui coïncide avec celle que l'on avait obtenue par le changement de la variable indépendante.

150. *Courbes osculatrices.* — Si l'on considère, au lieu d'un cercle, une courbe représentée par une équation donnée de forme, et contenant un certain nombre de coefficients indéterminés, on pourra lui donner autant de points communs avec la courbe proposée, qu'il y a de ces coefficients. Si l'on fait ensuite tendre tous ces points vers le premier, la limite vers laquelle tend la courbe variable se nomme la *courbe osculatrice* de la proposée, relativement à celles qui sont renfermées dans l'équation indéterminée.

Ces conditions géométriques peuvent être exprimées par des relations très-simples entre les coefficients différentiels successifs des ordonnées des deux courbes : soient $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ les abscisses de m points communs à deux courbes, croissant par degrés inégaux suivant une loi quelconque; on supposera, pour mettre le plus de généralité possible dans la question, que l'on prenne pour variable indépendante une quantité quelconque t, dont x, et par suite y, seront des fonctions connues.

Soient $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m$ les valeurs de y relatives aux points communs; les différences successives de y_1 jusqu'à l'ordre $m-1$ peuvent s'exprimer au moyen des valeurs

$y_1, y_2, \ldots, y_m$, et il est évident qu'elles seront les mêmes pour les deux courbes, puisque les ordonnées $y_1, y_2, \ldots, y_m$ sont les mêmes. Les rapports $\frac{dy_1}{dt}$, $\frac{d^2 y_1}{dt^2}, \ldots, \frac{d^{m-1} y_1}{dt^{m-1}}$ seront donc identiquement les mêmes de part et d'autre, et, par suite, leurs limites seront aussi les mêmes.

Les $m - 1$ premières dérivées de y par rapport à t auront donc les mêmes valeurs au point commun, dans les deux courbes, et il en sera de même de

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2 x}{dt^2}, \ldots, \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}}.$$

Or on sait, d'après les formules relatives au changement de la variable indépendante, que les valeurs de

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}$$

ne dépendent que des dérivées de x et de y par rapport à t, depuis le premier ordre jusqu'à celui que l'on considère, inclusivement.

Donc, quelle que soit la loi continue suivant laquelle les points communs se rapprochent du premier, la courbe limite sera telle, que pour $x = x_1$ les quantités

$$y_1, \quad \frac{dy_1}{dx}, \quad \frac{d^2 y_1}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}}$$

auront la même valeur si on les tire de son équation, ou de l'équation de la courbe donnée.

Donc, pour déterminer les m coefficients de l'équation de la courbe osculatrice, il suffira d'égaler les valeurs des m quantités $y_1, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}}$, que l'on tirera des équations des deux courbes, et dans lesquelles on donnera à x et y les valeurs x_1, y_1 du point que l'on a choisi sur la première courbe.

Mais on formera plus simplement ces m équations en différentiant $m-1$ fois l'équation qu'il faut déterminer, et remplaçant dans celle-ci et dans ses $m-1$ dérivées, x et y par x_1, y_1, et les dérivées de y par celles qu'on tirera de l'équation connue.

Telle est la méthode générale au moyen de laquelle on trouve l'équation de la courbe osculatrice d'une espèce donnée.

Contact des courbes planes.

151. Lorsque deux courbes ont un point commun, et que l'on augmente l'abscisse de ce point d'une quantité infiniment petite, la différence des ordonnées est généralement du premier ordre.

Si cette différence est du deuxième ordre, on dit que les courbes ont un contact du premier ordre; si elle est du troisième ordre, on dit que le contact est du second; et, en général, il y a un contact du $n^{ième}$ ordre entre deux courbes, lorsque la différence de leurs ordonnées, à partir du point commun, est un infiniment petit de l'ordre $n+1$.

Entre deux courbes qui ont un contact d'un certain ordre, il est évidemment impossible qu'il en passe une autre dans le voisinage du point commun, si son contact avec l'une quelconque des deux est d'un ordre inférieur.

Pour qu'il n'y ait rien d'incertain dans cette définition des contacts de différents ordres, il est nécessaire de démontrer que l'ordre du contact est indépendant de la direction des axes; or c'est ce que l'on établit facilement en prouvant que, pour un point quelconque de l'une des courbes, les différences des ordonnées des deux courbes considérées relativement à des axes différents sont dans un rapport fini. Cette différence est la plus petite possible

quand les ordonnées sont perpendiculaires à la tangente au point commun.

La seule direction qu'on doive excepter pour les ordonnées est celle de la tangente au point commun.

Maintenant, si l'on développe en séries les ordonnées des deux courbes suivant les puissances de l'accroissement de l'abscisse du point commun, on reconnait immédiatement que le contact entre ses courbes sera de l'ordre n, si les n premières dérivées de l'ordonnée par rapport à l'abscisse sont respectivement égales pour chacune des courbes, quand on y substitue l'abscisse du point commun : car, dans ce cas, la différence des ordonnées, exprimée au moyen des deux termes qui complètent respectivement les deux séries, est un infiniment petit de l'ordre $n+1$:

C'est là le caractère analytique auquel on reconnait l'ordre du contact de deux lignes qui ont un point commun.

Autre manière d'envisager les courbes osculatrices.

152. Il résulte de ce qui vient d'être dit sur le contact des courbes, que pour avoir la courbe d'une espèce donnée, qui a le contact de l'ordre le plus élevé avec une courbe dont l'équation est connue, il suffit de déterminer les coefficients arbitraires de l'équation générale des courbes dont l'espèce est donnée, en exprimant que, pour l'abscisse que l'on considère, les ordonnées sont respectivement égales, ainsi que leurs dérivées successives jusqu'à l'ordre le plus élevé possible. On établira ainsi autant d'équations qu'il y a de coefficients indéterminés. L'ordre du contact sera le nombre de ces équations, moins une.

On voit par là que la courbe *osculatrice* et la courbe qui a le contact de l'ordre le plus élevé sont identiques.

Pour la ligne droite, dont l'équation n'a que deux coefficients arbitraires, le contact ne sera, en général, que du premier ordre; il sera du deuxième pour le cercle. Mais il pourra arriver qu'en certains points particuliers le contact soit d'un ordre plus élevé.

Lorsque l'équation de la courbe osculatrice cherchée n'est pas résolue par rapport à y, on forme ses équations différentielles successives et l'on y substitue à y', $\frac{dy'}{dx'}$, etc., les valeurs tirées de l'équation de la courbe donnée. Les seules inconnues sont alors les coefficients; et s'ils entrent tous au premier degré, on trouvera un seul système de valeurs, et, par conséquent, une seule courbe osculatrice.

Lorsque le nombre des dérivées communes est pair, la différence est d'un ordre impair, et, par conséquent, change de signe avec l'accroissement de x': donc alors les courbes se coupent. C'est ce qui arrive, en général, pour le cercle osculateur.

Si, au contraire, le nombre des dérivées communes est impair, la différence est d'ordre pair et ne change pas de signe avec l'accroissement de x': les lignes ne se coupent donc pas. C'est ce qui a lieu dans le cas de la ligne droite, excepté aux points d'inflexion.

153. Les courbes les plus simples que l'on puisse mettre en contact avec une courbe donnée sont celles qui sont renfermées dans l'équation

$$y = A + Bx + Cx^2 + \ldots + Kx^m.$$

On peut établir un contact de l'ordre $m - 1$ entre les deux courbes, et l'on aura immédiatement l'équation de la courbe osculatrice en développant son ordonnée par la formule de Taylor, après avoir remplacé x par $x' + (x - x')$. Cette équation est la suivante, dans la-

quelle les dérivées de y' sont remplacées par celles que donne l'équation de la courbe connue,

$$y = y' + \frac{dy'}{dx'}(x - x') + \frac{d^2y'}{dx'^2}\frac{(x-x')^2}{1.2} + \ldots + \frac{d^my'}{dx'^m}\frac{(x-x')^m}{1.2.3\ldots m};$$

si $m = 1$, on a la droite osculatrice dont l'équation est

$$y = y' + \frac{dy'}{dx'}(x - x').$$

154. *Cercle osculateur.* — L'équation générale du cercle est

$$(x - \alpha)^2 + (y - 6)^2 = R^2,$$

α, 6 étant les coordonnées du centre, et R le rayon. D'après les théories précédentes, on déterminera les constantes α, 6, R, relatives au cercle osculateur au point x', y' d'une courbe donnée, au moyen des trois équations

$$(x' - \alpha)^2 + (y' - 6)^2 = R^2,$$

$$(x' - \alpha) + (y' - 6)\frac{dy'}{dx'} = 0,$$

$$1 + \frac{dy'^2}{dx'^2} + (y' - 6)\frac{d^2y'}{dx'^2} = 0;$$

$\frac{dy'}{dx'}$ et $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ étant tirés de l'équation de la courbe donnée La seconde de ces équations montre que le centre du cercle osculateur est situé sur la normale.

On tirera de là

$$y' - 6 = -\frac{1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}}{\frac{d^2y'}{dx'^2}}, \quad x' - \alpha = \frac{dy'}{dx'}\frac{\left(1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}\right)}{\frac{d^2y'}{dx'^2}},$$

et, substituant dans la première,

$$R = \frac{\left(1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y'}{dx'^2}}.$$

Cette équation donne pour le rayon la valeur déjà trouvée par une autre voie; et les deux précédentes font connaître les coordonnées α, 6 du centre de courbure, en fonction de x', y'.

Si entre ces deux équations et celle de la courbe donnée on élimine x', y', l'équation résultante entre α et 6 représentera le lieu des centres de courbure. Cette courbe s'appelle la *développée* de la première.

Théorie des développées.

155. Les équations qui déterminent les coordonnées α, 6 du centre de courbure, ou du point de la *développée* correspondant au point (x', y') de la courbe donnée, sont, d'après le numéro précédent,

$$(1) \qquad (x' - \alpha) + (y' - 6)\frac{dy'}{dx'} = 0,$$

$$(2) \qquad 1 + \frac{dy'^2}{dx'^2} + (y' - 6)\frac{d^2y'}{dx'^2} = 0.$$

Ces équations ayant lieu quel que soit le point que l'on considère, si l'on donne à x' un accroissement infiniment petit, y', α, 6, qui sont des fonctions de x', en recevront de correspondants, et les équations (1) et (2) seront encore satisfaites; les accroissements de leurs premiers membres seront donc nuls, et, par suite, leurs dérivées par rapport à x'.

Or l'équation (1), différentiée en considérant α, 6, y' comme fonctions de x', et ayant égard à l'équation (2),

donne

$$-\frac{d\alpha}{dx'}-\frac{d\beta}{dx'}\frac{dy'}{dx'}=0,\quad \text{ou}\quad \frac{d\beta}{d\alpha}=-\frac{1}{\frac{dy'}{dx'}};$$

d'où il résulte que *la normale à la courbe donnée est tangente à sa développée, au centre de courbure.*

156. On peut déduire de là une autre propriété très-remarquable de la développée.

Soit O (*fig.* 10) le point de rencontre de deux normales infiniment voisines MN, M'N'; il est facile de démontrer que l'arc NN' de la développée est égal à la différence des deux rayons de courbure MN, M'N', aux quantités près du troisième ordre, tout au plus.

En effet, si du point O comme centre on décrit l'arc de cercle MK, la partie M'K est un infiniment petit du troisième ordre, puisque le cercle MK a pour limite le cercle osculateur. En négligeant cette quantité, on peut considérer M'N' comme égal à MO + ON', et, par conséquent, M'N' — MN est égal à NO + ON', aux quantités près du troisième ordre. Mais la différence entre un arc infiniment petit NN' et la somme des tangentes extrêmes NO + N'O est aussi du troisième ordre. Donc la différence des rayons de courbure MN, M'N' est égale à l'arc de la développée compris entre les deux points de contact infiniment voisins, plus une quantité infiniment petite, du troisième ordre au moins.

Mais on sait que la limite d'une somme d'infiniment petits n'est pas changée quand on néglige dans chacun d'eux une quantité infiniment petite par rapport à lui-même. Donc, si l'on considère une infinité de rayons de courbure consécutifs, la somme de leurs différences, ou la différence du premier au dernier, est rigoureusement égale à l'arc de la développée, compris entre les points de contact des rayons extrêmes.

Il résulte de là que si l'on supposait un fil flexible inextensible et sans épaisseur, ayant une de ses extrémités en un point quelconque M de la courbe donnée, et que l'on tendît ce fil en l'enroulant sur la développée, à partir du point de contact N, il suffirait de développer ce fil, en le tenant tendu, pour décrire la première courbe avec son extrémité M.

C'est cette propriété qui a fait donner le nom de *développée* d'une courbe au lieu géométrique de ses centres de courbure. Relativement à la développée, la courbe prend le nom de *développante*.

157. Le calcul peut conduire à la même propriété; il suffit, pour cela, de parvenir à une équation qui ne renferme que dR, $d\alpha$, $d6$.

Or, si l'on différentie l'équation

$$(3) \qquad (x'-\alpha)^2 + (y'-6)^2 = R^2,$$

on trouvera, en ayant égard à l'équation (1),

$$-(x'-\alpha)\frac{d\alpha}{dx'} - (y'-6)\frac{d6}{dx'} = R\frac{dR}{dx'};$$

et si l'on remet pour $x'-\alpha$ sa valeur tirée de (1), il vient

$$(y'-6)\left(\frac{dy'}{dx'}\frac{d\alpha}{dx'} - \frac{d6}{dx'}\right) = R\frac{dR}{dx'},$$

et, remplaçant $\frac{dy'}{dx'}$ par $-\frac{d\alpha}{d6}$,

$$-(y'-6)\left(\frac{d\alpha^2+d6^2}{d6\,dx'}\right) = R\frac{dR}{dx'}.$$

Pour éliminer $y'-6$, on remarquera que les équations (1) et (3) donnent

$$R = (y'-6)\sqrt{1+\frac{dy'^2}{dx'^2}}, \quad \text{ou} \quad R = (y'-6)\sqrt{1+\frac{d\alpha^2}{d6^2}},$$

d'où

$$y' - 6 = \frac{R\,d6}{\sqrt{d\alpha^2 + d6^2}}.$$

Reportant cette valeur de $y' - 6$ dans l'équation ci-dessus, il vient, abstraction faite du signe du radical,

$$dR = \sqrt{d\alpha^2 + d6^2},$$

ce qui démontre que la différentielle du rayon de courbure est égale à celle de l'arc de la développée. D'où l'on tire les mêmes conséquences que précédemment.

Si l'on donnait l'équation $F(\alpha, 6) = 0$ de la développée, et qu'on demandât celle de la développante, il faudrait éliminer α et 6 entre l'équation donnée et les deux suivantes :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{d\alpha}{d6}, \quad x - \alpha - (y - 6)\frac{d\alpha}{d6} = 0,$$

dans lesquelles $\frac{d\alpha}{d6}$ serait donné en fonction de α et 6 au moyen de l'équation $F(\alpha, 6) = 0$. Il en résulterait une équation entre x, y, $\frac{dy}{dx}$, et, au moyen du calcul intégral, on trouverait l'équation finie entre x et y.

Courbes enveloppes.

158. Nous avons vu que le centre de courbure est la limite du point de rencontre d'une normale fixe avec la normale infiniment voisine; que, par conséquent, la développée est le lieu géométrique de ces points limites, considérés sur toutes les normales : nous avons vu de plus que la normale, dans toutes ses positions, est tangente au lieu de ses intersections successives.

Généralisons ces conditions, en supposant une courbe

représentée par une équation quelconque

$$F(x, y, a) = 0,$$

dans laquelle a est une constante.

Pour chaque valeur de a on aura une courbe particulière, et si l'on conçoit que a varie d'une manière continue, on aura une suite continue de courbes infiniment voisines les unes des autres. Si l'on en considère une comme fixe, la courbe infiniment voisine la coupera en certains points qui tendront vers des limites déterminées à mesure que la courbe variable se rapprochera de la première; ces points limites, considérés sur toutes ces courbes, forment le lieu que nous allons nous proposer de déterminer.

Soit h une quantité infiniment petite; l'équation

$$F(x, y, a+h)$$

représentera une courbe infiniment voisine de celle dont l'équation est

$$F(x, y, a) = 0.$$

Il faut donc chercher les valeurs de x et y qui satisfont à ces deux équations, et les limites vers lesquelles elles tendent quand h tend vers zéro. L'équation de la courbe variable peut se mettre sous la forme

$$F(x, y, a) + hF'(a + \theta h) = 0.$$

Les coordonnées des points communs aux deux courbes satisferont aux deux équations

$$F(x, y, a) = 0, \quad F'(a + \theta h) = 0.$$

Leurs limites seront donc les solutions communes aux deux suivantes :

$$F(x, y, a) = 0 \quad \text{et} \quad F'(a) = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{dF}{da} = 0;$$

et si l'on veut le lieu des points qu'elles fournissent, il faut éliminer a entre ces deux équations.

La règle pour former l'équation du lieu de ces intersections successives consiste donc à *éliminer la constante entre l'équation de la courbe variable et sa dérivée par rapport à cette constante.*

Il est nécessaire de remarquer que les raisonnements précédents supposent que la fonction $F(x, y, a)$ n'ait qu'une seule valeur, pour un même système de valeurs de x, y, a; car, sans cela, il serait possible qu'on dût prendre deux des formes différentes de cette fonction dans les équations des deux courbes voisines. Dans ce cas, on ne pourrait supprimer $F(x, y, a)$ dans le second, et les valeurs limites de x, y seraient celles qui rendraient égales les deux valeurs de cette fonction.

159. Cette courbe jouit de la propriété remarquable d'être tangente à toutes les positions successives de la courbe variable.

En effet, si de l'équation $\frac{dF}{da} = 0$ on tire $a = \varphi(x, y)$, et qu'on substitue cette valeur dans $F(x, y, a) = 0$, on aura, pour l'équation du lieu cherché,

$$F[x, y, \varphi(x, y)] = 0. \tag{1}$$

Soit l'équation d'une quelconque des courbes variables

$$F(x, y, a) = 0. \tag{2}$$

Ces deux courbes (1) et (2) ont généralement des points communs, d'après la génération de la première; or il est facile de démontrer qu'en ces points la valeur de $\frac{dy}{dx}$ est la même d'après les deux équations.

En effet, l'équation (1) différentiée donne

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF}{d\varphi}\left(\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Mais $\frac{dF}{d\varphi}$ ne diffère de $\frac{dF}{da}$ qu'en ce que $\varphi(x, y)$ y remplace a, et $\varphi(x, y)$ est précisément la valeur de a qui rend nul $\frac{dF}{da}$: donc $\frac{dF}{d\varphi}$ est identiquement nul, et il reste pour déterminer $\frac{dy}{dx}$, d'après l'équation (1),

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Maintenant l'équation (2) différentiée donne

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0,$$

équation qui ne diffère de la précédente qu'en ce que a y remplace $\varphi(x, y)$. Mais pour le point commun aux deux courbes, on a $a = \varphi(x, y)$, puisque cette équation n'est autre que $\frac{dF}{da} = 0$: donc, en ce point, la valeur de $\frac{dy}{dx}$ est la même pour les courbes; donc enfin la courbe variable est constamment tangente à la courbe fixe qui est le lieu de ses intersections successives, et c'est pour cela qu'on a donné à cette dernière le nom de *courbe enveloppe*.

Néanmoins il ne faut pas croire que la courbe enveloppe soit nécessairement tangente à toutes les courbes variables; cela n'a lieu que pour celles qui sont coupées par les courbes infiniment voisines, et les raisonnements précédents ne s'appliquent qu'à celles-là. Or il peut arriver que ce ne soit qu'entre certaines limites de la constante que cette intersection ait lieu. Il est donc plus exact de définir la courbe enveloppe par la propriété d'être le lieu des intersections successives des courbes variables, que par celle d'être tangente à ces courbes dans toutes leurs positions.

160. Si l'on prend pour la ligne variable la normale à

une courbe donnée, l'enveloppe sera le lieu des centres de courbure, puisqu'on a démontré qu'ils sont les limites des rencontres des normales infiniment voisines. En appliquant à cette question la théorie qui vient d'être exposée, il est facile de voir que le calcul conduit à la développée. En effet, l'équation d'une normale quelconque est

$$y - y' = -\frac{1}{\left(\frac{dy'}{dx'}\right)}(x - x');$$

y' est une fonction connue de x', et x' remplace ici la constante a. Différentiant cette équation par rapport à x', il vient

$$-\frac{dy'}{dx'} = \frac{\frac{d^2y'}{dx'^2}}{\frac{dy'^2}{dx'^2}}(x - x') + \frac{1}{\frac{dy'}{dx'}};$$

d'où

$$x - x' = -\frac{\frac{dy'}{dx'}\left(1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}\right)}{\frac{d^2y'}{dx'^2}},$$

et, par suite,

$$y - y' = \frac{1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}}{\frac{d^2y'}{dx'^2}}.$$

Ces valeurs de x et y sont précisément celles de α et β du n° 154. Pour obtenir l'équation de la courbe enveloppe, il faudrait éliminer x' entre ces deux équations, après avoir préalablement remplacé y' en fonction de x' : ce qui revient à éliminer x', y' entre ces deux équations et celle de la courbe donnée. Ce calcul n'est autre que celui qui est indiqué n° 154 pour obtenir l'équation de la développée.

Applications des théories précédentes.

161. *Parabole.* — Soit $x^2 = 2py$, on en tire

$$y = \frac{x^2}{2p}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{p}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{p}.$$

La valeur du rayon de courbure sera

$$R = p\left(1 + \frac{x^2}{p^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Les coordonnées du centre de courbure seront données par les équations

$$y - 6 = -p\left(1 + \frac{x^2}{p^2}\right)$$

et

$$x - \alpha = x\left(1 + \frac{x^2}{p^2}\right) \quad \text{ou} \quad \alpha = -\frac{x^3}{p^2}.$$

Éliminant x et y entre ces deux équations et celle de la parabole, on trouve, pour équation de la développée,

$$6 - p = \tfrac{3}{2} p^{\frac{1}{3}} \alpha^{\frac{2}{3}}.$$

Cette courbe a un rebroussement du premier genre au point pour lequel $\alpha = 0$.

162. *Ellipse.* — L'équation $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ donne

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3},$$

$$R = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}.$$

Or, en désignant toujours par N la longueur de la nor-

male, on a

$$N = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{1}{2}}}{a^2};$$

donc

$$R = \frac{a^2N^3}{b^4}.$$

Les coordonnées du centre de courbure seront données par les équations

$$y - 6 = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)\,y}{a^2b^4}, \quad x - \alpha = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)\,x}{b^2a^4}.$$

Si, au moyen de l'équation de l'ellipse, on élimine x de la première, et y de la seconde, on trouve, en posant $a^2 - b^2 = c^2$,

$$y^3 = -\frac{b^4 6}{c^2}, \quad x^3 = \frac{a^4\alpha}{c^2},$$

ou

$$y = -\frac{b^{\frac{4}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}}6^{\frac{1}{3}}, \quad x = \frac{a^{\frac{4}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}}\alpha^{\frac{1}{3}};$$

et, substituant dans l'équation de l'ellipse, on a, pour l'équation de la développée,

$$b^{\frac{2}{3}}6^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\alpha^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}.$$

163. *Hyperbole.* — Soit maintenant

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2,$$

on aura

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3},$$

$$R = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}, \quad N = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{1}{2}}}{a^2}, \quad R = \frac{a^2N^3}{b^4}.$$

Les équations qui déterminent les coordonnées du centre

de courbure seront

$$y - \beta = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2) y}{a^2 b^4}, \quad x - \alpha = -\frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2) x}{b^2 a^4};$$

d'où, en posant $a^2 + b^2 = c^2$,

$$y = -\frac{b^{\frac{4}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}} \beta^{\frac{1}{3}}, \quad x = \frac{a^{\frac{4}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}} \alpha^{\frac{1}{3}},$$

et l'équation de la développée sera

$$b^{\frac{2}{3}} \beta^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} \alpha^{\frac{2}{3}} = -c^{\frac{4}{3}}.$$

Elle se déduirait de celle de l'ellipse en y changeant b^2 en $-b^2$.

164. *Cycloïde.* — L'équation différentielle de la cycloïde est

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a}{y} - 1}, \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{a}{y^2},$$

et, par suite,

$$R = 2\sqrt{2ay}.$$

Or la normale MN (*fig.* 11) est égale à $\sqrt{2ay}$. Donc $R = 2MN$; on aura donc le centre de courbure O, relatif au point M, en prenant $NO = MN$. Mais si au milieu I de la base on élève la perpendiculaire IB égale au diamètre $2a$ du cercle générateur, et qu'on mène en B une parallèle BV à la base, le cercle décrit sur la perpendiculaire NC comme diamètre passera par O : l'arc NO sera donc égal à l'arc MN du cercle NMD, et, par suite, à la ligne AN. Donc $OC = NI = BC$. Donc le point O appartient à la cycloïde décrite par un point d'un cercle ayant $2a$ pour rayon, le point B pour origine, et BV pour base.

La développée de la cycloïde AEA' se compose donc de

deux demi-cycloïdes AB, A′B, identiques avec la première, et dont le prolongement se rapporterait aux branches suivantes de celle-ci.

165. La différence de deux rayons de courbure étant égale à l'arc de la développée, compris entre les deux points de contact, et le rayon de courbure de AEA′ étant nul au point A, la ligne MO est égale à l'arc AO. Donc dans toute cycloïde AOB, l'arc compris entre le sommet A et un point quelconque O est double de la corde NO du cercle générateur NOC qui passe en ce point.

Ainsi, en revenant à la cycloïde primitive, on aurait

$$ME = 2MD,$$

et, par conséquent,

$$AE = 4a \quad \text{et} \quad AEA' = 8a.$$

Si l'on fait $2a - y = y'$, c'est-à-dire si l'on compte les y' à partir de E, dans le sens EI, et que l'on pose $EM = s$, on aura

$$s^2 = 8ay'.$$

Telle est l'équation de la cycloïde entre l'ordonnée et l'arc, comptés à partir de son sommet.

Si l'on applique à cette équation la formule

$$R = \frac{\sqrt{1 - \frac{dy'^2}{ds^2}}}{\frac{d^2y'}{ds^2}},$$

on trouvera

$$R = 2\sqrt{2a(2a - y')} = 2\sqrt{2ay}.$$

166. Pour trouver l'équation de la développée, il faudra éliminer x et y entre l'équation de la cycloïde

$$x = a \text{ arc cos} \frac{a - y}{a} - \sqrt{2ay - y^2},$$

et les deux équations entre α, β, x, y, qui se réduisent à

$$y = -\beta, \quad x = \alpha + 2\beta\sqrt{-\frac{2a}{\beta} - 1} = \alpha - 2\sqrt{-2a\beta - \beta^2}.$$

D'après le signe qui a été choisi pour le radical, le point M que l'on considère est dans la partie AE.

Ces valeurs x et y, substituées dans l'équation de la cycloïde, donnent

$$\alpha = a \operatorname{arc\,cos} \frac{a + \beta}{a} + \sqrt{-2a\beta - \beta'^2}.$$

Si l'on transporte l'origine au point B, en posant

$$\alpha = \alpha' + \pi a, \quad \beta = \beta' - 2a,$$

on obtient

$$-\alpha' = a \operatorname{arc\,cos} \frac{a - \beta'}{a} - \sqrt{2a\beta' - \beta'^2}.$$

Si donc on compte les α' positifs dans le sens BV au lieu de BV', on retrouve l'équation de la cycloïde primitive

$$\alpha' = a \operatorname{arc\,cos} \frac{a - \beta'}{a} - \sqrt{2a\beta' - \beta'^2}.$$

167. On peut déterminer l'aire de la cycloïde en la considérant comme la somme des parties comprises entre les rayons de courbure consécutifs.

Soient QH, PK deux rayons infiniment voisins, S leur point de concours, et PR parallèle à AA'; le rapport des triangles semblables SLF, SRP est $\frac{SF^2}{SP^2}$, dont la limite est $\frac{1}{4}$; de plus, QRP est infiniment petit par rapport à ces triangles, ainsi que l'aire HSK. Donc la limite de la somme des aires LFPR, depuis A' jusqu'à A, est l'aire comprise entre la cycloïde AEA' et sa base; et la limite de la somme des triangles SLF est l'aire comprise entre

AA′ et les arcs AB, A′B : cette aire ajoutée à la première forme le rectangle construit sur AA′ et $2a$. D'ailleurs le rapport de LFPR à SLF a pour limite 3, puisque le rapport de SPR à SFL a pour limite 4. Donc l'aire de la cycloïde AEA′ est les trois quarts du rectangle qui a pour base $2\pi a$ et pour hauteur $2a$, et dont l'aire est, par conséquent, $4\pi a^2$.

L'aire de la cycloïde est donc $3\pi a^2$, ou trois fois celle du cercle générateur.

168. *Spirale logarithmique.* — Son équation $r = ae^{m\theta}$ donne, comme on l'a vu ci-dessus,

$$\frac{dr}{d\theta} = mae^{m\theta}, \quad \frac{d^2r}{d\theta^2} = m^2 ae^{m\theta},$$

$$N = ae^{m\theta}\sqrt{1+m^2} = \text{MO}, \ (\textit{fig. } 12)\ S_n = mae^{m\theta} = \text{AO}.$$

On trouvera, pour le rayon de courbure,

$$R = ae^{m\theta}\sqrt{1+m^2}, \quad \text{ou} \quad R = \text{MO}.$$

Le centre de courbure est donc à la rencontre de la normale avec la perpendiculaire menée par le pôle au rayon vecteur.

Si l'on pose

$$\text{OAX} = \theta', \quad \text{AO} = r',$$

l'équation polaire de la développée sera, d'après ce qui précède,

$$r' = mae^{m\left(\theta' - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

On peut lui donner la même forme qu'à la proposée, en comptant les angles à partir d'une droite faisant avec AX un angle α tel, que l'on ait

$$me^{m\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} = 1;$$

l'équation précédente devient alors

$$r' = ae^{m\theta}.$$

La développée d'une spirale logarithmique est donc une spirale identique, et qui coïnciderait avec elle, si on la faisait tourner autour du pôle, d'une quantité angulaire α égale à $\frac{\pi}{2} - \frac{\text{l}\, m}{m}$.

169. La différence des deux rayons de courbure MO, M′O′ étant égale à l'arc OO′ de la développée, il s'ensuit que si le point M′ tend indéfiniment vers le pôle, ainsi que O′, l'arc OO′ se rapprochera indéfiniment d'être égal à MO.

Ainsi la longueur totale de l'arc d'une spirale logarithmique compris entre un point quelconque O et le pôle asymptote, est égale à la tangente OM terminée à la perpendiculaire au rayon vecteur AO, menée par le pôle.

Tangentes et plans normaux aux courbes à double courbure.

170. Une courbe dont tous les points ne sont pas dans un même plan est dite à *double courbure*. La tangente en un quelconque de ses points est la limite vers laquelle tend une sécante qui passe par ce point et par un autre appartenant aussi à la courbe, et qui se rapproche indéfiniment du premier.

On appelle *longueur d'un arc* la limite vers laquelle tend le périmètre d'un polygone inscrit, lorsque ses côtés tendent tous vers zéro. Cette limite est indépendante du mode de division de l'arc, parce que les rapports des éléments correspondants de ces polygones, compris entre des plans parallèles infiniment voisins, ont pour limite l'unité.

On pourra donc encore prendre la corde au lieu de l'arc infiniment petit, et la différentielle ds de l'arc d'une courbe à double courbure aura pour expression

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

les axes de coordonnées étant supposés rectangulaires.

171. Une séante passant par les points de la courbe ayant pour coordonnées

$$x, y, z, \quad \text{et} \quad x + \Delta x, \quad y + \Delta y, \quad z + \Delta z,$$

fait, avec les axes, des angles dont les cosinus sont

$$\frac{\Delta x}{\Delta s}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta s}, \quad \frac{\Delta z}{\Delta s},$$

en regardant Δs comme égal à sa corde. Leurs signes apprennent si la droite dirigée du premier point vers le second fait, avec les axes, des angles aigus ou obtus.

Les limites de ces expressions, ou $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, sont les cosinus des angles que fait la tangente avec les axes.

172. Les équations de la sécante passant par le point x', y', z' de la courbe, et un autre point infiniment voisin, sont

$$x - x' = \frac{\Delta x'}{\Delta z'}(z - z'), \quad y - y' = \frac{\Delta y'}{\Delta z'}(z - z');$$

donc les équations de la tangente seront, en prenant ces rapports différentiels à leurs limites,

$$x - x' = \frac{dx'}{dz'}(z - z'), \quad y - y' = \frac{dy'}{dz'}(z - z').$$

Si la courbe est déterminée par les équations de ses projections sur les plans XZ, YZ, on tirera $\frac{dx'}{dz'}$ et $\frac{dy'}{dz'}$ de chacune d'elles.

Si elle est donnée par deux équations à trois variables

$$F(x, y, z) = 0, \quad f(x, y, z) = 0,$$

on en déduira

$$\frac{dF}{dx'}\frac{dx'}{dz'} + \frac{dF}{dy'}\frac{dy'}{dz'} + \frac{dF}{dz'} = 0, \quad \frac{df}{dx'}\frac{dx'}{dz'} + \frac{df}{dy'}\frac{dy'}{dz'} + \frac{df}{dz'} = 0,$$

et il faudra tirer de ces deux équations les valeurs de $\frac{dx'}{dz'}$, $\frac{dy'}{dz'}$, pour les reporter dans les précédentes, ou éliminer de toute autre manière $\frac{dx'}{dz'}$, $\frac{dy'}{dz'}$, entre les quatre équations; on obtient ainsi, pour les équations de la tangente,

$$\frac{dF}{dx'}(x - x') + \frac{dF}{dy'}(y - y') + \frac{dF}{dz'}(z - z') = 0,$$

$$\frac{df}{dx'}(x - x') + \frac{df}{dy'}(y - y') + \frac{df}{dz'}(z - z') = 0.$$

Nous verrons plus tard que ces équations ne sont autre chose que celles des plans tangents aux surfaces représentées par les deux équations données, et dont la courbe donnée est l'intersection.

173. On appelle *plan normal* celui qui est perpendiculaire à la tangente, au point de contact. Son équation sera, d'après celles que nous avons données d'abord pour la tangente,

$$z - z' + \frac{dx'}{dz'}(x - x') + \frac{dy'}{dz'}(y - y') = 0,$$

ou

$$(x - x')\,dx' + (y - y')\,dy' + (z - z')\,dz' = 0.$$

174. On pourrait parvenir à cette même équation en cherchant le lieu des droites menées par le point x', y', z', perpendiculairement à la tangente. Soient, en effet, x, y, z

les coordonnées d'un point quelconque d'une de ces droites, les cosinus des angles qu'elle fait avec les axes sont proportionnels aux quantités $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$; ceux qui se rapportent à la tangente sont proportionnels à dx', dy', dz': or, pour que ces deux directions soient perpendiculaires, il faut que le cosinus de leur angle soit nul; d'où résulte, pour tous les points du lieu,

$$(x-x')\,dx' + (y-y')\,dy' + (z-z')\,dz' = 0.$$

175. On peut encore obtenir l'équation du plan normal en le considérant comme la limite du plan qui renferme les points communs à deux sphères égales ayant leurs centres en deux points de la courbe, infiniment voisins.

Soient x', y', z' les coordonnées du premier point, $x'+\Delta x'$, $y'+\Delta y'$, $z'+\Delta z'$ celles du second, et R le rayon des sphères; l'équation de la première est

$$(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 = R^2;$$

celle de la seconde est

$$(x-x'-\Delta x')^2 + (y-y'-\Delta y')^2 + (z-z'-\Delta z')^2 = R^2.$$

Elles ont lieu en même temps pour les points communs, et si on les soustrait l'une de l'autre, on trouve, en négligeant les infiniment petits du second ordre et substituant les différentielles aux différences,

$$(x-x')\,dx' + (y-y')\,dy' + (z-z')\,dz' = 0.$$

Cette équation étant du premier degré est celle du plan qui contient le cercle d'intersection des sphères, pris à sa limite, ou du plan normal.

Toute ligne située dans le plan normal est dite *normale* à la courbe.

Tout plan passant par la tangente est nommé *plan tangent* à la courbe.

Plans tangents, plans normaux, et normales aux surfaces courbes.

176. *Plan tangent.* — Une tangente à une surface est la limite vers laquelle tend une sécante menée par un point de cette surface, lorsqu'un second point d'intersection tend vers le premier.

Ce second point pouvant tendre d'une infinité de manières vers le premier, il y a une infinité de tangentes à la surface en ce point. Nous allons démontrer que le lieu de toutes ces tangentes est un plan, et nous lui donnerons le nom de *plan tangent*.

Pour déterminer, en général, le lieu de ces tangentes, soit

$$F(x, y, z) = 0, \quad \text{ou} \quad z = f(x, y)$$

l'équation de la surface.

Les équations d'une tangente quelconque au point x', y', z' seront

$$x - x' = \frac{dx'}{dz'}(z - z'), \quad y - y' = \frac{dy'}{dz'}(z - z');$$

les quantités $\frac{dx'}{dz'}$, $\frac{dy'}{dz'}$ sont indéterminées, mais liées entre elles par l'équation

$$1 = p\frac{dx'}{dz'} + q\frac{dy'}{dz'},$$

dans laquelle p et q représentent les dérivées partielles $\left(\frac{dz'}{dx'}\right)$, $\left(\frac{dz'}{dy'}\right)$, tirées de l'équation $z = f(x, y)$.

Si l'on élimine $\frac{dx'}{dz'}$, $\frac{dy'}{dz'}$ entre les trois équations précédentes, on aura l'équation du lieu de toutes les tan-

gentes. On trouve ainsi

$$1 = p\,\frac{(x-x')}{z-z'} + q\,\frac{(y-y')}{z-z'},$$

ou

$$z - z' = p(x-x') + q(y-y'),$$

ou

$$z - z' = \frac{dz'}{dx'}(x-x') + \frac{dz'}{dy'}(y-y'),$$

$\frac{dz'}{dx'}$ et $\frac{dz'}{dy'}$ désignant les dérivées partielles de la fonction de x et y qui exprime la valeur de z. Cette équation étant du premier degré par rapport à x, y, z, il s'ensuit que le lieu des tangentes est un plan.

L'équation du plan tangent prend une autre forme quand l'équation de la surface est de la forme

$$F(x, y, z) = 0,$$

et non résolue par rapport à z.

On déterminera $\frac{dz'}{dx'}$ et $\frac{dz'}{dy'}$ par les équations

$$\frac{dF}{dx'} + \frac{dF}{dz'}\frac{dz'}{dx'} = 0, \quad \frac{dF}{dy'} + \frac{dF}{dz'}\frac{dz'}{dy'} = 0,$$

et l'équation du plan tangent sera

$$(x-x')\frac{dF}{dx'} + (y-y')\frac{dF}{dy'} + (z-z')\frac{dF}{dz'} = 0.$$

177. *Normale.* — La normale est la perpendiculaire au plan tangent, menée au point de contact; ses équations seront donc

$$x - x' = -\frac{dz'}{dx'}(z-z'), \quad y - y' = -\frac{dz'}{dy'}(z-z'),$$

ou

$$(x-x')\frac{dF}{dz'}=(z-z')\frac{dF}{dx'},\quad (y-y')\frac{dF}{dz'}=(z-z')\frac{dF}{dy'}.$$

178. *Plan normal.* — Si, au point de contact d'une tangente à une surface, on mène un plan perpendulaire à cette ligne, on aura un *plan normal* à la surface. On trouvera son équation, soit en partant des équations d'une tangente, soit par l'intersection de deux sphères égales dont les centres se rapprochent indéfiniment. De cette manière on aura pour l'équation d'un plan normal quelconque au point x', y', z',

$$(x-x')\,dx'+(y-y')\,dy'+(z-z')\,dz'=0.$$

Elle est indéterminée parce que les différentielles dx', dy', dz' ne sont assujettis qu'à la condition

$$dz'=pdx'+qdy'=\frac{dz'}{dx'}dx'+\frac{dz'}{dy'}dy';$$

si l'on substitue cette valeur de dz', on obtient

$$dx'\left[x-x'+\frac{dz'}{dx'}(z-z')\right]$$
$$+\,dy'\left[y-y'+\frac{dz'}{dy'}(z-z')\right]=0.$$

Cette équation changera avec le rapport que l'on établira entre dx', dy', et représentera tous les plans normaux au point donné.

179. De cette équation du plan normal, on peut déduire celle de la normale, et, par suite, du plan tangent. En effet, on voit qu'elle est satisfaite, quel que soit le rapport de dy' à dx', si l'on pose les deux équations

$$(x-x')+\frac{dz'}{dx'}(z-z')=0,\quad y-y'+\frac{dz'}{dy'}(z-z')=0.$$

Donc tous les plans normaux se coupent suivant une même droite, représentée par ces deux équations. Cette droite étant perpendiculaire à toutes les tangentes, ces dernières sont toutes dans un même plan, ayant pour équation

$$z - z' = \frac{dz'}{dx'}(x - x') + \frac{dz'}{dy'}(y - y').$$

On trouve ainsi, indépendamment de la première méthode, les équations du plan tangent et de la normale.

180. *Plan osculateur.* — On appelle ainsi la limite vers laquelle tend le plan qui passe par trois points d'une courbe, qui tendent indéfiniment à se réduire à un seul. Soient x', y', z' les coordonnées d'un point quelconque de la courbe, $x' + \Delta x'$, $y' + \Delta y'$, $z' + \Delta z'$ celles d'un point infiniment voisin, et $x' + 2\Delta x' + \Delta^2 x'$, $y' + 2\Delta y' + \Delta^2 y'$, $z' + 2\Delta z' + \Delta^2 z'$ celles d'un troisième point de la courbe, les différentielles étant déterminées d'après les accroissements égaux d'une variable quelconque, dont x', y', z' sont des fonctions déterminées.

Tout plan qui passe par le premier point a pour équation

$$z - z' = a(x - x') + b(y - y');$$

pour qu'il passe par les deux autres, on aura les conditions

$$\Delta z' = a\Delta x' + b\Delta y',$$

$$\Delta^2 z' = a\Delta^2 x' + b\Delta^2 y';$$

et pour le plan limite ces équations auront lieu entre les différentielles

$$dx',\quad dy',\quad dz',\quad d^2x',\quad d^2y',\quad d^2z'.$$

Les valeurs de a et b tirées de ces deux équations, et

reportées dans celle du plan, donnent l'équation du plan osculateur, qui est

$$(x - x')(dy'd^2z' - dz'd^2y') + (y - y')(dz'd^2x' - dx'd^2z') + (z - z')(dx'd^2y' - dy'd^2x') = 0.$$

181. Si l'on cherchait la limite des plans passant par la tangente en un point d'une courbe, et par un autre de ses points tendant vers le premier, il est facile de voir qu'on retrouverait le plan osculateur.

En effet, les équations de la tangente sont

$$x - x' = \frac{dx'}{dz'}(z - z'), \quad y - y' = \frac{dy'}{dz'}(z - z'),$$

et le plan dont l'équation est

$$z - z' = a(x - x') + b(y - y')$$

contiendra cette tangente, si l'on a

$$1 = a\frac{dx'}{dz'} + b\frac{dy'}{dz'}, \quad \text{ou} \quad dz' = adx' + bdy',$$

ou, prenant t pour variable indépendante,

$$\frac{dz'}{dt} = a\frac{dx'}{dt} + b\frac{dy'}{dt}.$$

Pour que ce même plan passe par un point ayant pour coordonnées $x' + \Delta x'$, $y' + \Delta y'$, $z' + \Delta z'$, il faudra que l'on ait

$$\Delta z' = a\Delta x' + \Delta dy'.$$

Mais on ne pourra, dans cette équation, négliger les termes du second ordre, parce que tous ceux du premier disparaissent, en vertu de l'équation précédente.

En effet, si l'on développe les différences, et qu'on se

borne au second ordre, on aura

$$\Delta z' = \frac{dz'}{dt}\Delta t + \frac{d^2z'}{dt^2}\frac{\Delta t^2}{2} + \ldots,\quad \Delta y' = \frac{dy'}{dt}\Delta t + \frac{d^2y'}{dt^2}\frac{\Delta t^2}{2} + \ldots,$$

$$\Delta x' = \frac{dx'}{dt}\Delta t + \frac{d^2x'}{dt^2}\frac{\Delta t^2}{2} + \ldots.$$

Substituant dans l'équation ci-dessus, les termes qui renferment Δt au premier degré disparaissent, et il reste, en négligeant les infiniment petits du troisième ordre, et divisant par $\frac{\Delta t^2}{2}$,

$$\frac{d^2z'}{dt^2} = a\frac{d^2x'}{dt^2} + b\frac{d^2y'}{dt^2},\quad \text{ou}\quad d^2z' = ad^2x' + bd^2y'.$$

Les coefficients a et b sont donc déterminés par les mêmes équations que précédemment, et l'on trouve l'équation du plan osculateur.

On trouverait encore le même plan en cherchant la limite de celui qui passerait par une tangente et une parallèle à la tangente infiniment voisine.

182. *Angle de contingence.* — On appelle ainsi l'angle de deux tangentes infiniment voisines, ou, pour parler rigoureusement, la différentielle qui correspond à cet angle infiniment petit; c'est-à-dire une quantité dont le rapport à l'accroissement de la variable indépendante soit égal à la limite du rapport de l'angle des tangentes à ce même accroissement. Ces tangentes n'étant pas dans un même plan, leur angle est celui de deux droites qui passeraient par un même point et leur seraient parallèles. Soient a, b, c les cosinus des angles formés avec les axes par la première tangente, et $a+\Delta a$, $b+\Delta b$, $c+\Delta c$ ceux qui se rapportent à la seconde; le cosinus de l'angle ω de ces deux directions sera

$$\cos\omega = a^2+b^2+c^2+a\Delta a+b\Delta b+c\Delta c = 1+a\Delta a+b\Delta b+c\Delta c.$$

De l'équation

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

on tire

$$2a\Delta a + 2b\Delta b + 2c\Delta c + \Delta a^2 + \Delta b^2 + \Delta c^2 = 0;$$

donc

$$1 - \cos\omega = 2\sin^2\frac{\omega}{2} = \frac{\Delta a^2 + \Delta b^2 + \Delta c^2}{2}.$$

Si l'on remplace $\sin\omega$ par ω, et les différences par les différentielles, ω sera ce que nous avons appelé l'angle de contingence, et l'on aura

$$\omega^2 = da^2 + db^2 + dc^2, \quad \text{ou} \quad \omega = \sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}.$$

On pourrait encore établir cette formule par des considérations géométriques.

Menant MB (*fig.* 13) parallèle à la seconde tangente, et prenant $MA = MB = 1$, on a

$$AB = \omega.$$

Projétant le polygone MAB sur les trois axes, et appelant λ, μ, ν les angles de la direction AB avec les directions positives de ces axes, on pourra écrire

$$da = \omega\cos\lambda, \quad db = \omega\cos\mu, \quad dc = \omega\cos\nu,$$

$$\omega = \sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}, \quad \cos\lambda = \frac{da}{\sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}},$$

$$\cos\mu = \frac{db}{\sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}}, \quad \text{arc} = \frac{dc}{\sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}}.$$

Cela fait connaître l'angle de contingence et les cosinus des angles de la direction prise du point M vers le centre de courbure.

Or on a

$$a = \frac{dx}{ds}, \quad b = \frac{dy}{ds}, \quad c = \frac{dz}{ds};$$

d'où l'on tire

$$da = \frac{dsd^2x - dxd^2s}{ds^2}, \quad db = \frac{dsd^2y - dyd^2s}{ds^2},$$

$$dc = \frac{dsd^2z - dzd^2s}{ds^2};$$

substituant ces valeurs dans celle de ω, et observant qu'on a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

$$dsd^2s = dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z,$$

on obtiendra

$$\omega = \frac{1}{ds}\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2}.$$

On peut faire disparaître d^2s de cette expression, en tirant sa valeur de l'équation précédente : on trouve ainsi, toute réduction faite,

$$\omega = \frac{1}{ds^2}\sqrt{(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2}.$$

183. Si, au lieu de chercher l'angle de deux tangentes en des points M, M' infiniment voisins (*fig.* 14), on cherchait l'angle de la corde MM' avec la corde M'M'', en supposant les deux points M'M'' correspondants aux accroissements égaux d'une variable quelconque t, on trouverait la même expression pour l'angle TM'M''. En effet, les cosinus des angles de MT avec les axes sont les rapports $\frac{\Delta x}{MM'}, \frac{\Delta y}{MM'}, \frac{\Delta z}{MM'}$, et diffèrent de quantités infiniment petites, de leurs limites respectives $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$. Le changement de t en $t + dt$ donnera donc les mêmes accroissements dans les uns et les autres, en négligeant les quantités d'un ordre supérieur à celui des accroissements. Il est donc inutile de recommencer ici les calculs précé-

dents; et la valeur de TM'M'' aura la même expression que celle de l'angle de contingence ω.

184. *Cercle osculateur.* — Dans les courbes à double courbure, comme dans les courbes planes, nous appellerons *cercle osculateur* la limite du cercle qui passe par trois points infiniment voisins; ce cercle limite se trouvera évidemment dans le plan osculateur.

Soient M (*fig.* 15) un point quelconque de la courbe; M', M'' des points qui s'en approchent indéfiniment; O le point de rencontre des perpendiculaires menées par M, M'' à ces deux cordes, dans le plan qui les contient : M'O sera le diamètre du cercle passant par M, M', M''. L'angle O a pour mesure l'arc de cercle MM'M'' divisé par le diamètre M'O. Or on peut substituer à cet arc celui de la courbe, ou $2\Delta s + \Delta^2 s$.

On aura donc $M'O = \frac{2\Delta s}{O}$ en négligeant $\Delta^2 s$.

Mais l'angle O est égal à TM'M'' qui peut être remplacé par l'angle de contingence ω relatif à l'arc Δs. On aura ainsi, en désignant par R le rayon du cercle osculateur, $R = \frac{\Delta s}{\omega}$; d'où, en remettant pour ω l'une ou l'autre des deux expressions données précédemment, on tire les formules rigoureusement exactes

$$R = \frac{ds^2}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2}},$$

et

$$R = \frac{ds^3}{\sqrt{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}}.$$

185. *Angle de torsion.* — On appelle ainsi l'angle de deux plans osculateurs consécutifs, ou, pour parler plus exactement, la différentielle correspondante.

Soient α, 6, γ les angles que fait avec les axes la nor-

male à un plan osculateur; on aura, d'après l'équation de ce plan, x, y, z étant les coordonnées du point de la courbe,

$$\cos\alpha = \frac{dyd^2z - dzd^2y}{D}, \quad \cos\beta = \frac{dzd^2x - dxd^2z}{D},$$

$$\cos\gamma = \frac{dxd^2y - dyd^2x}{D},$$

en posant

$$D = \sqrt{(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2}$$

La normale au plan osculateur infiniment voisin fera avec la précédente un angle égal à celui des deux plans, si on le désigne par U, on aura, par un calcul semblable à celui qui a donné l'angle de contingence,

$$U = \sqrt{(d.\cos\alpha)^2 + (d.\cos\beta)^2 + (d.\cos\gamma)^2}.$$

Telle est l'expression de l'angle dont le plan de deux côtés voisins du polygone infinitésimal tourne autour du second pour venir passer par le troisième. Mais il faut l'obtenir en fonction des différentielles de x, y, z; pour cela, posant

$$dyd^2z - dzd^2y = X, \quad dzd^2x - dxd^2z = Y,$$

$$dxd^2y - dyd^2x = Z,$$

d'où

$$dyd^3z - dzd^3y = dX, \quad dzd^3x - dxd^3z = dY,$$

$$dxd^3y - dyd^3x = dZ,$$

on trouvera

$$U = \frac{\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)(dX^2+dY^2+dZ^2) - (XdX+YdY+ZdZ)^2}}{X^2+Y^2+Z^2}$$

$$= \frac{\sqrt{(YdZ-ZdY)^2+(ZdX-XdZ)^2+(XdY-YdX)^2}}{X^2+Y^2+Z^2}.$$

Mais on a

$$\frac{YdZ - ZdY}{dx} = \frac{ZdX - XdZ}{dy} = \frac{XdY - YdX}{dz}$$
$$= dx(d^2yd^3z - d^2zd^3y) + dy(d^2zd^3x - d^2xd^3z)$$
$$+ dz(d^2xd^3y - d^2yd^3x).$$

Donc

$$U = ds\frac{dx(d^2yd^3z - d^2zd^3y) + dy(d^2zd^3x - d^2xd^3z) + dz(d^2xd^3y - d^2yd^3x)}{(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2}.$$

Il n'y a pas lieu de représenter cette seconde courbure par celle d'un cercle qui se présenterait aussi naturellement que le cercle osculateur qui mesure la première.

186. Si le rayon de la première courbure est infini pour tous les points d'une ligne, tous les côtés du polygone infinitésimal inscrit dans cette ligne sont dans le prolongement les uns des autres, et, par conséquent, cette ligne est droite. La condition pour qu'une ligne soit droite pourrait donc s'exprimer par l'équation différentielle

$$(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2 = 0,$$

d'où l'on tire les trois équations

$$dyd^2z - dzd^2y = 0, \quad dzd^2x - dxd^2z = 0, \quad dxd^2y - dyd^2x = 0,$$

ou encore

$$d.\frac{dz}{dy} = 0, \quad d.\frac{dx}{dz} = 0, \quad d.\frac{dy}{dx} = 0;$$

d'où l'on conclut

$$\frac{dx}{dz} = a, \quad \frac{dy}{dz} = b,$$

a et b étant des constantes arbitraires. Et comme a et b sont les dérivées de az et bz, il suit d'une proposition démontrée précédemment, que les fonctions x et y ne

peuvent être que de la forme

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta,$$

α et β désignant des constantes arbitraires. On retombe ainsi sur les équations générales de la ligne droite.

Si la seconde courbure est nulle, tous les plans osculateurs se confondront, et la courbe sera plane. La condition pour qu'une courbe soit plane est donc exprimée par l'équation différentielle

$$dx(d^2yd^3z - d^2zd^3y) + dy(d^2zd^3x - d^2xd^3z) + dz(d^2xd^3y - d^2yd^3x) = 0,$$

équation qui se réduit à

$$d^2yd^3z - d^2zd^3y = 0,$$

si l'on prend x pour variable indépendante.

On vérifie bien facilement que cette relation existe pour tous les points d'une ligne située tout entière dans un plan.

187. *Surface polaire.* — Si l'on conçoit un polygone infinitésimal inscrit dans une courbe à double courbure, et qu'on élève des plans perpendiculaires au milieu de ses côtés successifs, la ligne d'intersection de deux de ces plans consécutifs sera le lieu des pôles du cercle passant par les trois sommets correspondants du polygone; et sa limite sera le lieu des pôles du cercle osculateur vers lequel tend le cercle variable.

Il est facile de reconnaître d'ailleurs que l'on trouverait la même ligne en cherchant la limite de l'intersection de deux plans normaux consécutifs.

Si l'on agit de la même manière en tous les points de la courbe donnée, on obtiendra une suite de lignes polaires qui formeront une surface qu'on nomme *surface polaire*. Elle n'est autre chose que le lieu des centres des sphères

limites de celles qui ont trois points infiniment voisins, communs avec la courbe. Cette surface est développable, car elle se compose d'éléments plans indéfinis compris entre les deux intersections successives de trois plans consécutifs. De plus, ces éléments plans ont pour limite de leurs directions, celles des plans tangents : donc tous les plans normaux à la courbe sont tangents à sa surface polaire, et cette dernière peut être considérée comme la surface enveloppe de ces plans.

188. *Sphère osculatrice.* — On désigne sous ce nom la limite des sphères qui ont avec la courbe quatre points communs qui se rapprochent indéfiniment. Le centre de la sphère passant par quatre sommets consécutifs du polygone inscrit, est à la rencontre des deux droites suivant lesquelles se coupent les trois plans perpendiculaires aux trois côtés consécutifs du polygone; c'est le point commun à deux droites polaires consécutives.

Les centres de ces sphères successives déterminent un polygone qui tend vers une courbe dont les droites polaires sont les tangentes; cette courbe est donc l'enveloppe des polaires. Elle est aussi l'arête de rebroussement de la surface développable, lieu de ces polaires, c'est-à-dire de la surface polaire.

189. *Équation de la surface polaire.* — Cette surface est le lieu des intersections successives des plans normaux, ou encore des normales à la courbe donnée. Or l'équation d'un plan normal quelconque est

$$(1)\quad (x-x')dx'+(y-y')dy'+(z-z')dz'=0.$$

Si l'on donne à la variable indépendante t, dont on regarde x', y', z' comme des fonctions connues, un accroissement infiniment petit Δt, et que l'on considère le plan normal au point voisin qui en résulte, son équation se composera des mêmes termes que la précédente, plus les

termes résultant du changement des quantités x', y', z', dx', dy', dz'. Les premiers termes s'annulent pour les points communs aux deux plans, et il reste, en négligeant ceux du troisième ordre et passant aux différentielles,

$$(2)\quad (x-x')d^2x'+(y-y')d^2y'+(z-z')d^2z'-ds'^2=0.$$

Les équations (1) et (2) ont donc lieu entre les coordonnées x, y, z de tous les points d'une des génératrices de la surface polaire.

Donc on aura l'équation de la surface polaire, en éliminant x', y', z' entre les équations (1), (2) et celles de la courbe donnée.

190. *Centre de la sphère osculatrice.* — Ce centre est la limite du point de rencontre de trois plans normaux consécutifs, ou de deux droites suivant lesquelles se coupent les deux premiers et les deux derniers de ces plans. L'une est représentée à la limite par les deux équations (1), (2); l'autre par ces équations augmentées de leurs différentielles. Pour la limite du point commun aux deux droites, les différentielles des équations (1), (2) par rapport à $x', y', z', dx', \ldots$, seront donc nulles, et il en résultera cette nouvelle équation

$$(3)\quad (x-x')d^3x'+(y-y')d^3y'+(z-z')d^3z'-3ds'd^2s'=0.$$

Les équations (1), (2), (3) donnent le centre de la sphère osculatrice correspondante au point (x', y', z'); et l'on aura les équations du lieu de ces centres, ou de l'arête de rebroussement de la surface polaire, en éliminant x', y', z' entre ces trois équations et celles de la courbe donnée; d'où il résulte deux équations entre x, y, z.

191. Il est facile de reconnaître, au moyen des équations (1), (2), que tout plan normal à la courbe est tangent à la surface polaire. En effet, considérons sur cette dernière un point quelconque infiniment voisin de

celui qui a pour coordonnées x, y, z et qui se trouve dans le plan normal déterminé par l'équation (1). Soient considérés dx, dy, dz comme les différences de leurs coordonnées : les équations (1), (2) sont satisfaites par les coordonnées du premier point ; et elles le seront par celles du deuxième, si l'on considère le plan normal infiniment voisin qui passe par ce deuxième point.

Or, si l'on donne à x, y, z ; x', y', z' les accroissements correspondants dx, dy, dz ; dx', dy', dz' dans l'équation (1), il restera, en vertu de l'équation (2),

$$dxdx' + dydy' + dzdz' = 0.$$

Mais la droite qui joint les deux points pris sur la surface polaire, et finit par lui être tangente, fait, avec les axes, des angles dont les cosinus sont proportionnels à dx, dy, dz ; l'équation précédente prouve donc que cette droite est perpendiculaire à la tangente à la courbe au point (x', y', z'), et que, par conséquent, elle est située dans le plan normal, au même point de cette courbe, puisqu'elle a déjà le point (x, y, z) commun avec ce plan.

192. *Centre de courbure.* — Le centre du cercle osculateur, ou le centre de la première courbure, se trouve dans le plan osculateur, et sur la droite polaire du point que l'on considère sur la courbe. On aura donc ses coordonnées en cherchant les valeurs de x, y, z qui satisfont aux équations

$$(x - x')\,dx' + (y - y')\,dy' + (z - z')\,dz' = 0,$$

$$(x - x')\,d^2x' + (y - y')\,d^2y' + (z - z')\,d^2z' = ds'^2,$$

$$(x - x')(dy'd^2z' - dz'd^2y') + (y - y')(dz'd^2x' - dx'd^2z') + (z - z')(dx'd^2y' - dy'd^2x') = 0.$$

Ces valeurs de x, y, z sont données par les formules sui-

vantes :

$$z - z' = \frac{R^2}{ds'^4}[dy'(dy'd^2z' - dz'd^2y') - dx'(dz'd^2x' - dx'd^2z')],$$

$$y - y' = \frac{R^2}{ds'^4}[dx'(dx'd^2y' - dy'd^2x') - dz'(dy'd^2z' - dz'd^2y')],$$

$$x - x' = \frac{R^2}{ds'^4}[dz'(dz'd^2x' - dx'd^2z') - dy'(dx'd^2y' - dy'd^2x')],$$

R désignant le rayon de courbure, dont la valeur est

$$R = \frac{ds'^3}{\sqrt{(dy'd^2z' - dz'd^2y')^2 + (dz'd^2x' - dx'd^2z')^2 + (dx'd^2y' - dy'd^2x')^2}}.$$

Si, au lieu de déterminer les coordonnées du centre de courbure, on voulait les équations du lieu de ces centres, il suffirait d'éliminer x', y', z' entre les trois premières équations et celles de la courbe donnée; les deux équations résultantes entre x, y, z seraient celles du lieu demandé.

193. *Contact des courbes à double courbure.* — Cette théorie est semblable à celle que nous avons donnée pour les courbes planes; seulement, au lieu de couper les courbes par des droites parallèles à un axe, il faudra les couper par des plans parallèles à l'un des plans coordonnés, par exemple au plan x, y. Ainsi, lorsque deux courbes auront un point commun x', y', z', et qu'en les coupant par un plan parallèle au plan x, y et situé à une distance infiniment petite dz' du point commun, la distance des deux points ainsi obtenus sur ces courbes sera infiniment petite, de l'ordre $n + 1$, on dira que les courbes ont un contact de l'ordre n. On reconnaît facilement que l'ordre de cette distance infiniment petite est le même pour des plans coordonnés quelconques, pourvu que les tangentes à ces courbes au point commun ne soient pas parallèles au plan sécant. La projection d'une

droite sur un plan étant égale au produit de cette droite par le cosinus de son inclinaison sur ce plan, le rapport des longueurs de la droite et de sa projection a une limite finie, si la limite de cette droite ne fait pas un angle droit avec le plan. Donc les trois projections orthogonales d'une droite variable de grandeur et de direction sont, en général, des grandeurs du même ordre que cette droite; et il en est toujours ainsi pour deux de ses projections au moins : il ne peut y avoir qu'une d'entre elles, au plus, qui soit infiniment petite par rapport à cette droite. D'où il suit que, pour que deux courbes à double courbure aient un contact de l'ordre n, il est nécessaire et suffisant que deux de leurs projections aient un contact de cet ordre; ce qui ramène à la théorie du contact des courbes planes. Ainsi les conditions pour que ce contact ait lieu au point dont les coordonnées sont x', y', z', consistent en ce que pour la valeur z' de z, les quantités

$$x,\ y,\ \frac{dx}{dz},\quad \frac{dy}{dz},\quad \frac{d^2x}{dz^2},\quad \frac{d^2y}{dz^2},\dots,\quad \frac{d^nx}{dz^n},\quad \frac{d^ny}{dz^n},$$

aient les mêmes valeurs d'après les équations de ces deux courbes. On obtiendra donc encore la courbe osculatrice d'une espèce donnée, en déterminant les coefficients de ses équations de manière qu'il en résulte le plus de dérivées communes avec la courbe donnée, à partir des premières. Si les projections sur un plan avaient un contact plus élevé que les projections sur un autre, il suit de ce qui précède que le moins élevé des deux exprimerait l'ordre du contact des deux courbes proposées.

194. *Droite osculatrice.* — Les équations générales d'une droite étant

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta,$$

les équations qui détermineront a, α, b, β seront

$$x' = az' + \alpha, \quad y' = bz' + \beta, \quad \frac{dx'}{dz'} = a, \quad \frac{dy'}{dz'} = b,$$

les dérivées $\frac{dx'}{dz'}$, $\frac{dy'}{dz'}$ étant tirées des équations de la courbe donnée. La droite osculatrice a donc pour équations

$$x - x' = \frac{dx'}{dz'}(z - z'), \quad y - y' = \frac{dy'}{dz'}(z - z'):$$

ce sont celles que nous avons déjà trouvées pour la tangente.

195. *Cercle osculateur.* — Les équations les plus commodes pour la détermination d'un cercle dans l'espace sont celles d'une sphère et d'un plan. Soient donc les équations générales du cercle

$$(1) \qquad (z - \gamma)^2 + (y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = R^2,$$

$$(2) \qquad z + ax + by + c = 0;$$

différentiant deux fois ces équations, en considérant x et y comme fonctions de z, et les autres quantités comme constantes, on aura les équations suivantes :

$$(3) \qquad (z - \gamma) + (y - \beta)\frac{dy}{dz} + (x - \alpha)\frac{dx}{dz} = 0,$$

$$(4) \qquad 1 + \frac{dy^2}{dz^2} + \frac{dx^2}{dz^2} + (y - \beta)\frac{d^2y}{dz^2} + (x - \alpha)\frac{d^2x}{dz^2} = 0,$$

$$(5) \qquad 1 + a\frac{dx}{dz} + b\frac{dy}{dz} = 0,$$

$$(6) \qquad a\frac{d^2x}{dz^2} + b\frac{d^2y}{dz^2} = 0.$$

On remettra dans ces six équations, au lieu de x, y, z, les coordonnées du point donné de la courbe, et l'on remplacera toutes les dérivées par celles que donneront les équations de cette même courbe. On en déduira les valeurs de six des constantes a, b, c, α, β, γ, R, et il en restera une indéterminée, parce qu'on peut faire passer une infinité de sphères par un même cercle.

Les coefficients a, b, c sont entièrement déterminés, et l'équation du plan devient, en désignant par x', y', z' les coordonnées du point donné,

$$(z - z')(dx'd^2y' - dy'd^2x') - dz'd^2y'(x - x') + dz'd^2x'(y - y') = 0.$$

Cette équation n'est autre chose que celle du plan osculateur, dans laquelle z est pris pour variable indépendante. Les équations (3), (4), dans lesquelles on regardera α, β, γ comme variables, représentent deux plans qui sont perpendiculaires au plan (2), en vertu des équations (5), (6). Les centres des sphères sont donc sur une perpendiculaire au plan du cercle, et elles couperont toutes ce plan suivant un même cercle, puisqu'elles passeront d'ailleurs par un même point (x', y', z').

Il est facile de reconnaître dans les équations (3), (4) celles qui déterminent la droite polaire relative au point (x', y', z') quand on prend z pour variable indépendante; et comme le centre du cercle s'obtiendra en cherchant l'intersection de cette droite avec le plan du cercle, on retrouve, d'après ce nouveau point de vue, tout ce qui avait été déterminé relativement au cercle osculateur, par des considérations différentes.

Contact des surfaces.

196. Lorsque deux surfaces ont un point commun (x', y', z'), et qu'en faisant varier x', y' de quantités infiniment petites quelconques dx', dy', la différence des valeurs de z correspondantes est un infiniment petit de l'ordre $n + 1$, on dit que ces surfaces ont un contact de l'ordre n. L'ordre de cette différence est le même pour toutes les directions qui ne sont pas parallèles aux plans tangents à ces surfaces, au point que l'on considère : il

résulte de là que deux surfaces auront un contact du premier ordre, lorsque pour une même valeur de x', y' on tirera des équations de l'une et de l'autre les mêmes valeurs pour z', $\frac{dz'}{dx'}$, $\frac{dz'}{dy'}$.

Elles auront un contact du second ordre lorsqu'elles donneront, en outre, les mêmes valeurs pour les coefficients différentiels partiels du second ordre

$$\frac{d^2z'}{dx'^2},\quad \frac{d^2z'}{dx'dy'},\quad \frac{d^2z'}{dy'^2}.$$

Enfin le contact sera de l'ordre n lorsque tous les coefficients différentiels seront les mêmes jusqu'à cet ordre inclusivement.

La surface osculatrice d'une espèce donnée se déterminera comme les courbes osculatrices, en établissant le plus grand nombre possible de dérivées communes entre les fonctions qui expriment la valeur de z dans son équation et celle de l'autre surface que l'on considère.

197. *Plan osculateur à une surface.* — Soit l'équation générale d'un plan

$$z = ax + by + c;$$

on aura, pour déterminer a, b, c, les équations

$$z' = ax' + by' + c,\quad \frac{dz'}{dx'} = a,\quad \frac{dz'}{dy'} = b,$$

$\frac{dz'}{dx'}$, $\frac{dz'}{dy'}$ étant tirées de l'équation de la surface donnée. L'équation du plan osculateur sera donc

$$z - z' = \frac{dz'}{dx'}(x - x') + \frac{dz'}{dy'}(y - y').$$

Ce plan n'est donc autre chose que le plan tangent.

198. *Sphère osculatrice à une surface.* — L'équation

la plus générale d'une sphère ne renfermant que quatre constantes arbitraires, on ne peut, en général, établir un contact du second ordre entre une sphère et une surface donnée, puisqu'il en résulterait six équations de condition. On ne pourra donc établir, entre ces surfaces, qu'un contact du premier ordre. Il restera une constante indéterminée dans l'équation de la sphère, et l'on pourra en profiter de manière à déterminer un contact du second ordre avec l'une des courbes que l'on peut tracer sur la surface; mais ces recherches nous écarteraient de notre objet.

199. *Contact des courbes et des surfaces.* — Si, à partir d'un point commun à une courbe et à une surface, on mène des parallèles à l'axe des z, on dira qu'il y a un contact de l'ordre n, lorsque la différence des valeurs correspondantes de z pour la courbe et la surface sera infiniment petite de l'ordre $n+1$. On arrivera à des conditions du même genre que dans les cas précédents, et dans le détail desquelles nous n'entrerons pas.

200. *Développées.* — Si l'on considère une quelconque des normales en un point d'une courbe à double courbure, elle sera tangente à la surface polaire. Le plan normal mené par un point de la courbe, infiniment voisin du premier, coupera cette normale en un point qui sera commun à deux normales infiniment voisines. En faisant pour la seconde normale ce qui a été fait pour la première, et continuant ainsi, on aura une suite indéfinie de normales à la courbe donnée, dont chacune rencontrera la suivante, et dont les points de contact avec la surface polaire seront infiniment rapprochés les uns des autres. Le point de concours des deux normales consécutives, se trouvant sur l'intersection des deux plans normaux, se rapproche indéfiniment de la surface polaire, qui est le lieu des limites des intersections des plans normaux consécutifs.

Cette suite de normales détermine donc un polygone dont les côtés sont infiniment petits, et dont la limite est une courbe tangente à toutes ces normales, et située sur la surface polaire : on l'appelle *développée* de la courbe donnée.

Comme on peut choisir une quelconque des normales à la courbe au point de départ, on obtiendra une infinité de développées aussi rapprochées que l'on voudra, et toutes seront sur la surface polaire, qui peut être considérée comme en étant le lieu géométrique. Relativement à ces courbes que nous avons nommées développées, la première prend le nom de *développante*, à cause d'une propriété analogue à celle que nous avons reconnue dans les courbes planes, et dont nous allons donner la démonstration.

Soient MN, M'N' (*fig.* 16) deux droites normales en M et M' à la courbe en question, N et N' leurs points de contact avec la développée; nous allons prouver que la différence des longueurs M'N' et MN est égale à l'arc NN', à un infiniment petit près, du second ordre au moins. En effet, si aux points M et N on conçoit deux plans perpendiculaires à MN, la longueur M'P sera du second ordre puisque la courbe M'M est tangente au plan; de plus, QP surpasse MN d'une quantité infiniment petite du second ordre. On peut donc prendre N'Q comme égale à la différence M'N' — MN, à une quantité près du second ordre. Mais la limite du rapport de N'Q à la corde NN' est l'unité, puisque les angles Q et N du triangle rectiligne QNN' tendent vers des angles droits. Donc N'Q diffère de l'arc N'N, tout au plus d'un infiniment petit du second ordre; donc, enfin, la différence de deux normales consécutives MN, M'N' est égale à l'arc NN', compris entre leurs points de contact avec la développée, plus ou moins une quantité infiniment petite par rapport

à cet arc, et qui, par conséquent, peut être négligée sans qu'il en résulte aucune erreur dans les limites des rapports ou des sommes.

Il résulte de là que si en deux points quelconques de la développée on mène des tangentes terminées à la développante, la différence de leurs longueurs est rigoureusement égale à l'arc compris entre les points de contact.

Et l'on voit par là que la différence entre $M'N' - MN$ et l'arc NN', qui devait être au moins du second ordre, était réellement égale à zéro.

Maintenant supposons un fil qui coïncide avec la développée à partir d'un point quelconque, où il s'en sépare tangentiellement et se prolonge jusqu'à la développante. Si on le déroule en le laissant toujours tangent à la développée, il prendra successivement la position des diverses normales qui sont tangentes à cette courbe; et ces normales croissant précisément de la même longueur que le fil qui se déroule, ce sera toujours le même point de ce fil qui se trouvera sur la développante. Cette courbe sera donc décrite par l'extrémité du fil pris dans la première position. C'est cette propriété qui a fait donner aux deux courbes, l'une par rapport à l'autre, les noms de *développée* et *développante*.

201. Le lieu des centres des cercles osculateurs d'une courbe à double courbure n'est pas une développée de cette courbe. En effet, deux plans osculateurs consécutifs se coupent suivant une droite qui a pour limite la tangente, et ils forment entre eux un angle infiniment petit du premier ordre. La distance du centre de courbure contenu dans le premier, au second plan, est donc un infiniment petit du premier ordre; or sa distance à la normale contenue dans ce second plan est plus grande que sa distance au plan : donc cette normale n'est pas tangente à la

courbe qui passe par ces deux centres, puisqu'il faudrait pour cela que cette distance fût un infiniment petit d'un ordre supérieur au premier. Le lieu des centres de courbure n'est donc pas une des développées, lorsque la courbe que l'on considère n'est pas plane.

202. Les développées d'une courbe à double courbure jouissent de la propriété remarquable de se réduire à des lignes droites quand on développe la surface polaire sur un plan.

Pour le démontrer, nous considérerons un polygone infinitésimal inscrit dans la courbe donnée, et ayant ses côtés égaux; ce qui revient à prendre l'arc pour variable indépendante. Sur les milieux de ces côtés nous concevrons des plans perpendiculaires, dout les intersections formeront les arêtes de la surface développable qui, à la limite, devient la surface polaire.

Or, si du point milieu d'un côté quelconque on trace une droite dans le plan normal, elle coupera l'arête commune à ce plan et au suivant, en un point qui, joint au milieu du côté suivant, donnera une normale à ce côté; et il est facile de voir que ces deux normales font des angles égaux avec l'arête que nous avons considérée.

Cette seconde normale prolongée coupera l'arête commune au second plan normal et au troisième, en un point qui, joint au milieu du troisième côté, formera une normale à ce côté, faisant avec la seconde arête le même angle que la normale précédente; et ainsi de suite indéfiniment.

Maintenant, si l'on développe sur un plan la surface qui renferme toutes ces arêtes, deux normales consécutives se rabattront l'une sur l'autre, puisqu'elles font le même angle avec l'arête sur laquelle elles se coupent; et le polygone infinitésimal, formé par les intersections de ces

normales successives, aura tous ses côtés sur une même droite. Ce résultat ayant lieu quelle que soit la petitesse des côtés de ce polygone, aura lieu pour la courbe limite, qui est une quelconque des développées de la courbe proposée.

Donc, dans le rabattement de la surface polaire sur un plan, toutes les développées de la courbe deviennent des lignes droites.

203. Dans le développement de la surface polaire, les côtés infiniment petits qui composent la développée ne changeant pas de longueur, un arc quelconque de cette courbe a la même longueur avant ou après le développement; et il en serait de même de toute autre ligne tracée sur cette surface. Donc le plus court chemin d'un point à un autre sur la surface polaire est l'arc de la développée qui passe par ces deux points, puisque, devenant une ligne droite, il est plus court que tout autre après une transformation qui n'a pas changé les longueurs.

On peut encore remarquer que si l'on suppose un fil appliqué sur le polygone formé par les normales successives que nous venons de considérer, et prolongé suivant un quelconque des côtés jusqu'au milieu du côté correspondant du premier polygone, inscrit dans la courbe donnée, et qu'ensuite on développe ce fil de manière à ce qu'il soit successivement dans le prolongement de chacun des côtés du polygone sur lequel il est appliqué, son extrémité passera par tous les milieux de côtés de l'autre polygone. Donc, si l'on passe aux limites des polygones, on retrouvera la propriété démontrée précédemment par des considérations différentes.

204. *Équations des développées.* — Si l'on désigne par x', y', z' les coordonnées d'un point quelconque de la courbe proposée, l'équation de la surface polaire s'obtient en éliminant x', y', z' entre les deux équations de la

courbe et les deux suivantes :

$$(x-x')\,dx' + (y-y')\,dy' + (z-z')\,dz' = 0,$$

$$(x-x')\,d^2x' + (y-y')\,d^2y' + (z-z')\,d^2z' = ds'^2.$$

Si maintenant on considère un quelconque des points dont les coordonnées x, y, z satisfont à ces équations, on passera de ce point au point voisin de la développée si la droite qui joint ces deux points est dans le prolongement de celle qui joint les points (x', y', z'), (x, y, z); ce qui aura lieu si les différentielles dx, dy, dz sont proportionnelles aux différences $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$. On tirerait de là les deux équations

$$\frac{dx}{dz} = \frac{x-x'}{z-z'},\quad \frac{dy}{dz} = \frac{y-y'}{z-z'}.$$

Mais une seule sera nécessaire, parce que les précédentes expriment que les points (x, y, z) ne cessent pas d'être sur la surface polaire. Une quelconque de ces deux équations étant jointe aux deux précédentes, et à celles de la courbe donnée, on aura cinq équations entre lesquelles on éliminera x', y', z', et l'on obtiendra deux équations différentielles qui conviendront à l'une quelconque des développées.

Application des théories précédentes à l'hélice.

205. Si l'on désigne par a le rayon de la base du cylindre, et par m la tangente de l'inclinaison de l'hélice sur le plan de cette base, les équations des trois projections de cette courbe seront

$$x = a\cos\frac{z}{ma},\quad y = a\sin\frac{z}{ma},\quad x^2 + y^2 = a^2.$$

L'axe des x passe par le point où l'hélice perce le plan de

la base; et cette courbe, en s'élevant, tourne de l'axe des x positifs vers l'axe des y positifs.

Ces équations différentiées donnent

$$dx = -\frac{1}{m}\sin\frac{z}{ma}dz,\quad dy = \frac{1}{m}\cos\frac{z}{ma}dz,\quad ds = \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}dz,$$

$$d^2x = -\frac{1}{m^2a}\cos\frac{z}{ma}dz^2,\quad d^2y = -\frac{1}{m^2a}\sin\frac{z}{ma}dz^2,\quad d^2s = 0.$$

L'équation du plan osculateur devient alors, en prenant z pour variable indépendante,

$$z - z' = -mx\sin\frac{z'}{ma} + my\cos\frac{z'}{ma}.$$

Ce plan fait avec le plan de la base un angle dont le cosinus est $\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$ et la tangente m. Il est le même que celui de l'hélice avec le même plan.

L'équation du plan normal sera

$$m(z - z') = x\sin\frac{z'}{ma} - y\cos\frac{z'}{ma}.$$

L'angle de contingence, dont l'expression générale est

$$\upsilon = \frac{1}{ds}\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2},$$

devient, dans le cas actuel,

$$\upsilon = \frac{dz}{am\sqrt{1+m^2}}.$$

L'angle de deux plans osculateurs consécutifs est

$$\frac{dz}{a\sqrt{1+m^2}} \quad \text{ou} \quad m\upsilon.$$

Le rayon du cercle osculateur, dont la valeur générale

est $R = \frac{ds}{v}$, sera égal à $a(1 + m^2)$; sa grandeur est donc constante et surpasse de am^2 le rayon de la base. Pour connaître sa direction, il faut chercher l'intersection du plan normal et du plan osculateur. Les équations combinées donnent

$$z = z', \quad y = x \operatorname{tang} \frac{z'}{ma}.$$

Donc le rayon de courbure est constamment parallèle au plan de la base, et rencontre l'axe du cylindre. Le centre de courbure se meut donc sur un cylindre ayant même axe que le premier, et pour base un cercle dont le rayon est am^2. Il décrit donc sur ce cylindre une hélice dont le pas est le même que celui de l'hélice proposée.

On trouvera le même résultat en calculant les coordonnées du centre de courbure. Leurs valeurs sont

$$z = z', \quad y = -am^2 \sin \frac{z}{ma}, \quad x = -am^2 \cos \frac{z}{ma},$$

et l'on en déduit immédiatement les conséquences précédentes.

Déterminons maintenant les équations d'une arête quelconque de la surface polaire, c'est-à-dire de l'intersection de deux plans normaux infiniment voisins. Ces équations sont les suivantes :

$$m(z - z') = x \sin \frac{z'}{ma} - y \cos \frac{z'}{ma},$$

$$x \cos \frac{z'}{ma} + y \sin \frac{z'}{ma} = -am^2.$$

Cette droite est nécessairement perpendiculaire au plan osculateur, et on le vérifiera facilement au moyen de ses équations. Comme d'ailleurs elle passe par le centre de

courbure et qu'elle est perpendiculaire au rayon de courbure, elle est tangente au cylindre sur lequel se meut l'extrémité de ce rayon, et dont la base a pour rayon am^2. De plus, il est facile de reconnaître qu'elle est tangente à l'hélice décrite par cette extrémité. En effet, puisqu'elle est perpendiculaire au plan osculateur, elle fait avec le plan de la base un angle dont la tangente est $\frac{1}{m}$: or l'hélice qui est le lieu des centres de courbure, et dont nous venons de donner les équations, est tracée sur le cylindre dont le rayon est am^2, et fait avec sa base un angle dont la tangente est $\frac{1}{m}$. Donc l'arète de la surface polaire est tangente à cette hélice, et la surface polaire est l'héliçoïde développable dont cette hélice est l'arête de rebroussement.

Mais on sait que la sous-tangente d'une hélice sur le plan de sa base est égale à l'arc de cette base, depuis l'origine de l'hélice jusqu'à la projection du point de contact. Donc la trace de la surface polaire sur le plan (xy) est la développante de la base du cylindre dont le rayon est am^2.

Si l'on veut avoir l'équation de la surface polaire, il faut éliminer z' entre les deux équations

$$m(z-z') = x\sin\frac{z'}{ma} - y\cos\frac{z'}{ma},$$

$$x\cos\frac{z'}{ma} + y\sin\frac{z'}{ma} = -am^2.$$

Ajoutant les carrés des membres de ces deux équations, on obtient

$$m^2[(z-z')^2 + a^2m^2] = x^2 + y^2;$$

substituant dans la seconde, on trouve l'équation cher-

chée, qui est

$$x \cos\left(\frac{z}{ma} \pm \sqrt{\frac{x^2+y^2}{m^4a^2} - 1}\right)$$
$$+ y \sin\left(\frac{z}{ma} \mp \sqrt{\frac{x^2+y^2}{m^4a^2} - 1}\right) = -am^2.$$

La trace de cette surface sur le plan (xy) a pour équation

$$x \cos\sqrt{\frac{x^2+y^2}{m^4a^2} - 1} \pm y \sin\sqrt{\frac{x^2+y^2}{m^4a^2} - 1} = -am^2.$$

Cette courbe est la développante du cercle dont le rayon est am^2, et elle prend naissance au point de ce cercle situé sur l'axe des x, et du côté des x négatifs; ce qui s'accorde avec une des propositions précédemment démontrées.

Une hélice pouvant avoir ses deux courbures égales à celle d'une courbe quelconque en un de ses points, son osculation sera d'un ordre plus élevé que celle du cercle : elle donnerait donc une idée plus exacte de la courbe à laquelle on la comparerait. Les deux constantes m et a se détermineraient en égalant ses deux courbures à celles de la courbe donnée, au point considéré.

CALCUL INTÉGRAL.

206. Toute opération nouvelle donne naissance à l'opération inverse, dans laquelle on prend pour donnée le résultat de la première, et pour inconnue l'une de ses données. La différentiation, ou l'opération par laquelle on détermine, soit la différentielle, soit la dérivée d'une fonction, conduit donc naturellement à la recherche de la fonction dont on connaît la différentielle ou la dérivée. Cette dernière opération se nomme *intégration*.

Il est d'abord nécessaire de démontrer que cette question admet toujours une solution.

Soit $F(x)\,dx$ la différentielle proposée; il s'agit de faire voir que, quelle que soit la fonction $F(x)$, il en existe toujours une autre qui donne pour dérivée $F(x)$, ou pour différentielle $F(x)\,dx$. C'est ce que l'on peut établir d'une manière très-simple, par des considérations géométriques.

En effet, si l'on conçoit la courbe dont l'équation serait

$$y = F(x),$$

l'aire comprise entre une ordonnée fixe et une autre ordonnée variable correspondante à l'abscisse x est une fonction de x, exprimable ou non au moyen des fonctions élémentaires auxquelles on a donné des noms particuliers. Or on a démontré, dans le calcul différentiel, que la dérivée de cette aire par rapport à l'abscisse variable x, est la fonction qui exprime l'ordonnée de la courbe; donc l'aire de la courbe dont l'équation est

$$y = F(x)$$

est une fonction dont la dérivée est $F(x)$, et la différentielle $F(x)\,dx$.

Le problème a donc toujours une solution, et il est facile de voir qu'il en a une infinité ; car si l'on ajoute une quantité quelconque indépendante de x à une expression qui satisfait à la question, on en aura une nouvelle qui satisfera de même, puisque la dérivée de la constante est zéro.

De plus, nous avons démontré que deux fonctions qui ont la même dérivée ne peuvent différer que par une constante : on aura donc la fonction la plus générale qui ait une dérivée donnée, en ajoutant une constante arbitraire à une fonction particulière quelconque qui aurait cette même dérivée.

207. *Intégrales définies.* — Désignons par $f(x)$ la fonction dont la dérivée est $F(x)$. Si l'on fait passer la variable, d'une valeur particulière a à une valeur quelconque x, entre lesquelles ces fonctions restent continues, la fonction $f(x)$ prendra l'accroissement fini $f(x)-f(a)$, que l'on peut regarder comme identique avec la somme des accroissements infiniment petits que recevra successivement la fonction, quand on passera de a à x, par un nombre indéfiniment croissant de valeurs intermédiaires. Mais, d'après la définition de la dérivée, l'accroissement de $f(x)$ résultant de l'accroissement dx de la variable, et le produit $F(x)\,dx$, ont pour limite de leur rapport l'unité, quelque valeur de x que l'on considère : donc on peut remplacer l'une par l'autre ces quantités infiniment petites, sans que la limite de la somme cesse d'être égale à la somme des premières, qui est $f(x)-f(a)$. D'où l'on tire cette conséquence générale, que la somme des produits d'une fonction continue quelconque par l'accroissement de la variable, lorsqu'on y fait passer cette variable par toutes les valeurs intermédiaires entre la première et la dernière, a toujours une limite égale à la différence des valeurs que

prend, pour les valeurs extrêmes de x, une fonction qui a pour dérivée la première. Cette limite se nomme une *intégrale définie*; nous la représenterons de cette manière:

$$\int_a^x \mathrm{F}(x)\,dx.$$

Réciproquement, l'accroissement fini d'une fonction quelconque peut être regardé comme la limite de la somme des produits de sa dérivée par l'accroissement infiniment petit de x, quand on fait passer cette variable par tous les degrés entre ses valeurs extrêmes.

208. Il est utile d'observer que dans chacun des produits $\mathrm{F}(x)\,dx$, on peut prendre, au lieu de x, toute valeur qui en diffère d'une quantité infiniment petite; car la limite du rapport des éléments correspondants sera l'unité, puisque $\mathrm{F}(x)$, et, par suite, $\mathrm{F}(x)\,dx$, aura varié d'une quantité infiniment petite par rapport à lui-même.

On pourrait même, au lieu du facteur dx, prendre une quantité qui en différerait d'un infiniment petit d'un ordre supérieur au premier, parce que la limite du rapport des éléments correspondants serait toujours l'unité.

Il résulte de là une proposition déjà démontrée, et qui consiste en ce que deux fonctions qui ont la même dérivée ne peuvent différer que par une constante, c'est-à-dire par une quantité indépendante de la variable. En effet, les accroissements qu'elles prendront respectivement quand x passera d'une valeur quelconque à toute autre valeur, seront les mêmes, comme étant limites de sommes identiques: donc la différence des deux fonctions est la même quel que soit x.

209. La fonction la plus générale qui ait pour différentielle une expression donnée $\mathrm{F}(x)\,dx$ se nomme l'*intégrale indéfinie* de $\mathrm{F}(x)\,dx$, et se représente ainsi: $\int \mathrm{F}(x)\,dx$. Elle est égale à une constante arbitraire, plus

une fonction particulière quelconque ayant pour différentielle $F(x)\,dx$; elle peut donc être exprimée par

$$\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx + C,$$

x_0 étant une valeur particulière quelconque de x, et C une constante arbitraire. On aura donc, en général,

$$\int F(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} F(x)\,dx + C.$$

Si l'on pouvait connaître une fonction $\varphi(x)$ dont la dérivée fût $F(x)$, et qui ne résultât pas de la somme des valeurs de $F(x)\,dx$ entre deux limites x_0 et x, on aurait toujours la solution générale de l'équation en lui ajoutant une constante arbitraire. L'intégrale indéfinie serait donc donnée par l'équation

$$\int F(x)\,dx = \varphi(x) + C.$$

210. Si l'on connaît l'intégrale indéfinie de $F(x)dx$, et qu'on veuille déterminer l'intégrale définie entre les limites a et b, on cherchera d'abord l'intégrale définie dont les limites seraient a et une valeur quelconque de x: elle sera renfermée dans l'intégrale générale $\varphi(x) + C$, puisqu'elle jouit de la propriété d'avoir $F(x)$ pour dérivée. On aura donc

$$\int_{a}^{x} F(x)\,dx = \varphi(x) + C.$$

Mais C n'est plus arbitraire, parce que le premier membre de cette équation étant nul pour $x = a$, il faudra que l'on ait

$$\varphi(a) + C = 0; \quad \text{donc} \quad C = -\varphi(a),$$

et

$$\int_{a}^{x} F(x)\,dx = \varphi(x) - \varphi(a).$$

Si maintenant on fait $x = b$, on aura l'intégrale définie demandée

$$\int_a^b \mathrm{F}(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a),$$

ce qui s'accorde avec ce que l'on a vu précédemment, savoir, que la différence des valeurs d'une fonction quelconque, correspondante à deux valeurs a et b de x, était la limite de la somme des produits de sa dérivée par la différentielle de la variable.

Diverses méthodes d'intégration.

211. *Intégration immédiate.* — Lorsqu'on reconnaît dans l'expression à intégrer la différentielle d'une fonction connue, il suffit d'ajouter à cette fonction une constante arbitraire pour avoir l'intégrale générale demandée; et il est bon d'observer que si l'on multiplie une différentielle par une constante quelconque, l'intégrale se trouve multipliée par le même nombre. Ainsi d'abord, en considérant les différentielles de toutes les fonctions simples, comme nous l'avons déjà remarqué vers le commencement du calcul différentiel, on formera un premier recueil d'intégrales indéfinies, renfermé dans le tableau suivant :

$$d.x^{m+1} = (m+1)x^m dx, \ldots, \quad \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + \mathrm{C},$$

$$d.a^x = a^x \,\mathrm{l}\, a dx, \ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\mathrm{l}\, a} + \mathrm{C}, \quad \int e^x dx = e^x + \mathrm{C},$$

$$d.\log \;= \frac{\log e}{x} = \frac{1}{x\,\mathrm{l}\, a}, \ldots\ldots, \quad \int \frac{dx}{x} = \frac{\log x}{\log e} + \mathrm{C} = \mathrm{l}\, x + \mathrm{C},$$

$$\sin x = \cos x dx, \ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \int \cos x dx = \sin x + \mathrm{C},$$

$$d.\cos x = -\sin x dx, \ldots\ldots, \quad \int \sin x dx = -\cos x + \mathrm{C},$$

$$d.\operatorname{tang} x = \frac{dx}{\cos^2 x}, \ldots\ldots\ldots, \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x + C,$$

$$d.\cot x = -\frac{dx}{\sin^2 x}, \ldots\ldots\ldots, \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C,$$

$$d.\operatorname{arc}\sin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \ldots\ldots, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc}\sin x + C,$$

$$d.\operatorname{arc}\cos x = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}, \ldots\ldots, \qquad \int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc}\cos x + C,$$

$$d.\operatorname{arc}\operatorname{tang} x = \frac{dx}{1+x^2}, \ldots\ldots, \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc}\operatorname{tang} x + C,$$

$$d.\operatorname{arc}\cot x = \frac{-dx}{1+x^2}, \ldots\ldots\ldots, \qquad \int \frac{-dx}{1+x^2} = \operatorname{arc}\cot x + C,$$

Nous désignons ici par x une variable quelconque, qui pourrait être une fonction d'une autre variable.

En d'autres termes, on peut remplacer x par une fonction quelconque $\varphi(x)$ dans toutes les formules précédentes. Ainsi, par exemple, la première donnera

$$\int [\varphi(x)]^m . d.\varphi(x) = \frac{[\varphi(x)]^{m+1}}{m+1} + C.$$

212. Il y a une remarque à faire sur la formule

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C.$$

Elle devient illusoire lorsque l'on suppose $m = -1$. Dans ce cas, la différentielle est $\frac{dx}{x}$; et son intégrale $1x + C$ n'étant plus algébrique ne saurait, en effet, être fournie par l'expression algébrique $\frac{x^{m+1}}{m+1} + C$.

Néanmoins, comme la formule est exacte, quelque près que m soit de -1, on peut en déduire l'expression qui doit la remplacer dans ce cas particulier, en faisant converger m vers la limite -1, et choisissant la constante arbi-

traire de manière à ce que le résultat tende vers une limite finie. Il suffira, pour cela, de mettre le second membre sous la forme $\frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1} + C_1$, et la première partie se présentera sous la forme $\frac{0}{0}$ pour $m = -1$, C_1 étant une constante arbitraire; on aura donc constamment

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1} + C_1.$$

La première partie qui devient $\frac{0}{0}$ quand on fait $m = -1$, a une limite déterminée, égale à $1.x - 1.a$; et si l'on fait $C_1 - 1.a = C'$, on aura

$$\int x^{-1} dx = 1x + C',$$

ce qui s'accorde avec la troisième formule du tableau précédent.

213. *Intégration par décomposition.* — La différentielle d'une somme de fonctions étant la somme des différentielles de ces fonctions, il s'ensuit qu'on aura l'intégrale générale d'une somme de différentielles, en faisant la somme de leurs intégrales, et y ajoutant une constante arbitraire, si l'on n'en a déjà ajouté dans les intégrations partielles.

On pourra donc intégrer une expression différentielle, si l'on peut la décomposer en plusieurs autres dont on connaisse les intégrales. Quelquefois la décomposition n'est employée que pour ramener à des expressions plus simples, que l'on cherche ensuite à intégrer par d'autres procédés.

Le nombre des parties dans lesquelles on décompose la fonction donnée peut être infini; c'est ce qui arrive quand on la développe en série: dans ce cas il faudra toujours faire la somme des intégrales des différents termes; mais il y a quelques précautions à prendre relativement à la

convergence des séries, et nous reviendrons plus tard sur ce point.

214. *Intégration par substitution.*—Si l'on a à intégrer $F(x)\,dx$, et que l'on pose $x=\varphi(z)$, d'où $dx=\varphi'(z)\,dz$, l'expression donnée devient $F[\varphi(z)]\varphi'(z)\,dz$; et la limite de la somme des valeurs de celle-ci sera la même que la limite de la somme des valeurs de $F(x)\,dx$, pourvu que les valeurs extrêmes se correspondent dans ces deux sommes. Donc on aura

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x)\,dx = \int_{z_0}^{z_1} F[\varphi(z)]\varphi'(z)\,dz,$$

pourvu que z_0 et z_1 soient déterminés par les équations

$$x_0=\varphi(z_0),\quad x_1=\varphi(z_1).$$

On conclut de là que l'intégrale définie $\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx + C$ peut être remplacée par

$$\int_{z_0}^{z} F[\varphi(z)]\varphi'(z)\,dz + C.$$

On peut encore s'en assurer en observant que la fonction, dont la dérivée par rapport à x est $F(x)$, doit avoir pour dérivée par rapport à z,

$$F(x)\varphi'(z),\quad \text{ou}\quad F[\varphi(z)]\varphi'(z).$$

La question est donc ramenée à trouver une fonction dont la dérivée par rapport à z soit la fonction $F[\varphi(z)]\varphi'(z)$.

La relation $x=\varphi(z)$ étant arbitraire, on parvient souvent à la déterminer de manière à rendre la seconde intégration plus simple que la première.

Ainsi, par exemple, $\int_{x_0}^{x} F(x+a)\,dx$ devient, en po-

sant $x + a = y$,

$$\int_{x_0+a}^{x+a} F(y)\,dy;$$

ou, en changeant la lettre y en x,

$$\int_{x_0+a}^{x+a} F(x)\,dx;$$

on a donc

$$\int_{x_0}^{x} F(x+a)\,dx = \int_{x_0+a}^{x+a} F(x)\,dx.$$

Si, dans l'intégrale $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$, on pose $x = ay$, d'où $dx = a\,dy$, on a

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{a}\,\text{arc tang}\,y + C = \frac{1}{a}\,\text{arc tang}\,\frac{x}{a} + C.$$

Soit maintenant

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}, \quad x^2 + a^2 = y^2, \quad x\,dx = y\,dy,$$

on aura

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int dy = y + C = \sqrt{x^2+a^2} + C.$$

Voici encore quelques exemples :

$$\int e^x F(e^x)\,dx, \quad e^x = y, \quad e^x\,dx = dy, \quad \int e^x F(e^x)\,dx = \int F(y)\,dy,$$

$$\int \cos x\, F(\sin x)\,dx, \quad \sin x = y, \quad \int \cos x\, F(\sin x)\,dx = \int F(y)\,dy,$$

$$\int F(1x)\frac{dx}{x}, \quad 1x = y, \quad \frac{dx}{x} = dy, \quad \int F(1x)\frac{dx}{x} = \int F(y)\,dy.$$

215. *Intégration par parties.* — La formule

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

donne

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

et ramène la recherche de l'intégrale $\int u dv$ à celle de $\int v du$. Or on peut souvent décomposer la fonction $F(x)$, qui se trouve sous le signe d'intégration, en deux facteurs tels, que l'un soit une différentielle connue, et que l'intégrale à laquelle on est conduit par ce procédé soit plus simple que la première. Cette méthode s'appelle *intégration par parties*. Soit, par exemple, $\int x \cos x dx$, on prendra $\cos x dx$ pour la différentielle dv, et x remplacera u; on aura donc

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

De même

$$\int x^m \cos x dx = x^m \sin x - m \int x^{m-1} \sin x dx.$$

Cette dernière se ramènera à une autre où l'exposant de x sera $m-2$, et ainsi de suite; on finira donc par arriver à $\int \sin x dx$ ou $\int \cos x dx$, suivant que m sera impair ou pair. Nous allons appliquer ces différentes méthodes au petit nombre de fonctions qui peuvent être intégrées généralement.

Intégration des fonctions rationnelles.

216. Toute fonction rationnelle de x peut être considérée comme composée d'une partie entière par rapport à x et d'une fraction dont le numérateur est d'un degré moindre que le dénominateur : il y aura des cas où l'une de ces deux parties seulement existera. La partie entière s'intégrera toujours immédiatement, et il ne peut y avoir de difficulté que pour la partie fractionnaire.

Soit donc $\frac{F(x)}{f(x)} dx$ la différentielle qu'il s'agit d'intégrer,

$F(x)$ étant d'un degré moindre que $f(x)$. On cherchera à décomposer $\frac{F(x)}{f(x)}$ en fractions plus simples, ayant pour dénominateurs les facteurs premiers de $f(x)$; ce qui exige d'abord que l'on cherche les racines de ce polynôme. Supposons-les déterminées, et considérons d'abord le cas où elles seraient toutes inégales; désignons-les par $a, b, c, \ldots, l$. Soient A, B, C,..., L, des constantes indéterminées, et proposons-nous de satisfaire à l'identité

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \ldots + \frac{L}{x-l},$$

ou, en multipliant par $f(x)$,

$$(1) \quad F(x) = A\frac{f(x)}{x-a} + B\frac{f(x)}{x-b} + C\frac{f(x)}{x-c} + \cdots + L\frac{f(x)}{x-l}.$$

Toutes ces divisions indiquées dans le second membre donnent des quotients entiers, et les indéterminées sont en même nombre que les différents ordres de termes, relativement à x: on pourrait donc trouver leurs valeurs en égalant, suivant la méthode ordinaire, les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres. Mais il existe dans le cas actuel un moyen beaucoup plus simple. En effet, si l'on fait $x = a$, l'identité subsistera toujours, et tous les termes du second membre disparaîtront, excepté $A\frac{f(x)}{x-a}$. Pour savoir ce qu'il devient, on pourrait faire d'abord la division par $x-a$, puis faire $x = a$ dans le quotient entier. Mais il vaut mieux traiter la fraction $\frac{f(x)}{x-a}$ d'après la règle relative aux fractions qui se réduisent à $\frac{0}{0}$; et l'on voit alors qu'elle se réduit à $f'(a)$.

Ainsi l'hypothèse $x = a$ réduit l'identité à la formule suivante :

$$F(a) = Af'(a), \quad \text{d'où} \quad A = \frac{F(a)}{f'(a)};$$

et comme $f'(a)$ n'est pas nul, puisque a n'est pas une racine multiple, il est toujours possible de déterminer A de manière à ce que l'équation (1) ait lieu pour $x = a$.

On voit de même qu'en prenant

$$B = \frac{F(b)}{f'(b)}, \quad C = \frac{F(c)}{f'(c)}, \ldots, \quad L = \frac{F(l)}{f'(l)},$$

l'équation (1) sera satisfaite par $x = b$, $x = c, \ldots, x = l$. Il reste à en déduire la preuve de l'identité (1); car il est très-important d'observer, en général, qu'il ne suffit pas d'avoir trouvé des valeurs pour les coefficients indéterminés, lorsque l'on n'a pas prouvé d'avance la possibilité du développement. Or on sait que quand deux fonctions entières de x sont égales pour un nombre de valeurs particulières de x, supérieur au degré du terme le plus élevé, elles sont égales, terme pour terme. Donc les deux membres de l'équation (1) sont rendus identiques par les valeurs trouvées pour A, B, C,..., L, puisqu'ils sont égaux pour les diverses valeurs a, b, $c, \ldots, l$, dont le nombre surpasse d'une unité le degré du terme le plus élevé.

217. S'il y avait des racines imaginaires, rien ne serait changé dans les raisonnements précédents. Les constantes qui se rapporteraient à deux racines conjuguées, ne différeraient l'une de l'autre que par le signe de $\sqrt{-1}$, et les deux fractions seraient de la forme

$$\frac{M - N\sqrt{-1}}{x - \alpha - 6\sqrt{-1}}, \quad \frac{M + N\sqrt{-1}}{x - \alpha + 6\sqrt{-1}}.$$

Si l'on veut faire disparaître les imaginaires, on effectuera la somme de ces deux fractions, qui se réduira à

$$\frac{2M(x - \alpha) + 26N}{(x - \alpha)^2 + 6^2}.$$

On agirait de même pour toutes les autres racines imaginaires.

218. Supposons maintenant que l'équation

$$f(x) = 0$$

ait à la fois des racines inégales et des racines égales; soit a l'une quelconque de ces dernières, et

$$f(x) = (x-a)^m \varphi(x),$$

le polynôme $\varphi(x)$ n'admettant plus le facteur $(x-a)$; posons

$$(1)\quad \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{A_1}{(x-a)^{m-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{m-2}} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{x-a} + \frac{P}{\varphi(x)},$$

ou, en multipliant par $f(x)$,

$$(2)\quad \begin{cases} F(x) = A\varphi(x) + A_1(x-a)\varphi(x) + A_2(x-a)^2\varphi(x) + \ldots \\ \qquad + A_{m-1}(x-a)^{m-1}\varphi(x) + P(x-a)^m. \end{cases}$$

Le nombre des coefficients du polygone P, ajouté au nombre des constantes $A, A_1, \ldots, A_{m-1}$, est égal au nombre des termes de cette équation; et il s'agit de les déterminer de manière à la rendre identique. Si l'on y fait $x = a$, on obtient

$$F(a) = A\varphi(a),$$

d'où l'on tirera la valeur de A. Différentiant l'équation (2) et faisant ensuite $x = a$, il vient

$$F'(a) = A\varphi'(a) + A_1\varphi(a).$$

Différentiant successivement la même équation et faisant ensuite $x = a$, on introduira à chaque fois un nouveau coefficient, et l'on pourra ainsi, au moyen de $m - 1$ différentiations, déterminer $A, A_1, \ldots, A_{m-1}$. Les termes provenant de $P(x-a)^m$ disparaîtront tous par l'hypothèse $x = a$.

Cherchons la formule générale qui représente toutes ces équations successives, et, pour cela, différentions p fois l'équation (2).

Pour savoir ce qui reste de chacun des termes quand on fera $x = a$ après la différentiation, considérons le terme général $A_n (x-a)^n \varphi(x)$. On trouvera sa dérivée de l'ordre p au moyen de la formule connue

$$\frac{d^p (QR)}{dx^p} = Q^p R + pQ^{p-1} R' + \frac{p(p-1)}{1.2} Q^{p-2} R'' + \ldots + QR^p,$$

dans laquelle les exposants de Q et R sont des indices de différentiation. On aura ainsi

$$(3) \begin{cases} \dfrac{d^p [(x-a)^n \varphi(x)]}{dx^p} = n(n-1)\ldots(n-p+1)(x-a)^{n-p} \varphi(x) \\ \qquad + \dfrac{p}{1} n(n-1)\ldots(n-p+2)(x-a)^{n-p+1} \varphi'(x) \\ + \dfrac{p(p-1)}{1.2} n(n-1)\ldots(n-p+3)(x-a)^{n-p+2} \varphi''(x) + \ldots + (x-a)^n \varphi^p(x). \end{cases}$$

Si p est plus grand que n, les premiers termes auront des exposants négatifs, et on devra les omettre parce que leurs coefficients seront zéro; cela tient à ce que quand $(x-a)$ sera affecté de l'exposant zéro, il donnera zéro pour dérivée.

219. Voyons maintenant ce que devient le second membre de l'équation (3) quand on y fait $x = a$. Si l'on a $p < n$, il se réduit à zéro. Si l'on a $p = n$, il se réduit à son premier terme $n(n-1)\ldots2.1\,\varphi(a)$. Enfin, si l'on a $p > n$, il faudra se borner à prendre le terme qui en a $p - n$ avant lui, parce qu'il aura zéro pour exposant; les précédents auraient donc un exposant négatif et doivent être omis, comme nous l'avons dit; et les suivants deviendront nuls quand on fera $x = a$. Le second membre de l'équation (3) se réduit donc alors à

$$p(p-1)\ldots(p-n+1)\varphi^{p-n}(a).$$

Donc l'équation (2), différentiée p fois en supposant $p < m$, donnera, pour $x = a$, en observant qu'il faut

s'arrêter à $n = p$,

$$(4)\begin{cases} F^{p}(a) = A\varphi^{p}(a) + pA_1\varphi^{p-1}(a) + p(p-1)A_2\varphi^{p-2}(a) + \ldots \\ + p(p-1)\ldots(p-n+1)A_n\varphi^{p-n}(a) + \ldots + p(p-1)\ldots 2.1\, A_p\varphi(a). \end{cases}$$

Telle est l'équation générale qui, en donnant à p toutes les valeurs entières depuis 0 jusqu'à $m-1$ inclusivement, fournira m équations, d'où l'on déduira successivement chacune des quantités $A, A_1, \ldots, A_{m-1}$. Ces équations sont les suivantes :

$$(5)\begin{cases} F(a) = A\varphi(a), \\ F'(a) = A\varphi'(a) + A_1\varphi(a), \\ F''(a) = A\varphi''(a) + 2A_1\varphi'(a) + 2.1A_2\varphi(a), \\ F'''(a) = A\varphi'''(a) + 3A_1\varphi''(a) + 3.2A_2\varphi'(a) + 3.2.1A_3\varphi(a), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F^{m-1}(a) = A\varphi^{m-1}(a) + (m-1)A_1\varphi^{m-2}(a) + (m-1)(m-2)A_2\varphi^{m-3}(a) + \ldots \\ \qquad + (m-1)(m-2)\ldots 2.1\, A_{m-1}\varphi(a). \end{cases}$$

La première équation donne la valeur de A, et ce sera la seule inconnue si $m = 1$; la seconde fait ensuite connaître immédiatement A_1, la troisième A_2, et, ainsi de suite, jusqu'à A_{m-1} : et il n'y aura jamais impossibilité, parce que le coefficient du dernier terme n'étant jamais zéro, on trouvera toujours une valeur finie pour chaque inconnue.

Il reste à prouver que réciproquement, si l'on prend pour $A, A_1, \ldots, A_{m-1}$, les valeurs ainsi déterminées, on aura satisfait à l'identité (2). En effet, ces valeurs sont tirées des équations (5), qui expriment que l'hypothèse $x = a$ annule le polynôme suivant et ses $m-1$ premières dérivées,

$$F(x) - A\varphi(x) - A_1(x-a)\varphi(x) - A_2(x-a)^2\varphi(x)\ldots \\ - A_{m-1}(x-a)^{m-1}\varphi(x).$$

Donc, d'après un théorème connu, ce polynôme est divisible par $(x-a)^m$ et peut être mis sous la forme

$P(x-a)^m$, P étant un polynôme entier qu'il sera facile de connaître. Donc les identités (2) et (1) seront satisfaites.

Cela posé, on pourra traiter d'une manière semblable la fraction $\frac{P}{\varphi(x)}$ relativement à une autre racine multiple, si elle en renferme, et continuer ainsi jusqu'à la dernière. La fraction $\frac{F(x)}{f(x)}$ sera donc décomposée en fractions dont les numérateurs seront indépendants de x, et dont les dénominateurs ne renfermeront respectivement qu'un seul facteur premier de $f(x)$, élevé à une puissance égale ou inférieure au degré de multiplicité de ce facteur.

De plus, il est facile de reconnaître que cette décomposition ne peut se faire que d'une seule manière; car si les constantes relatives à la racine a, par exemple, étaient susceptibles de plusieurs valeurs, on devrait les trouver toutes, soit que le calcul fût fait d'abord pour cette racine, ou pour toute autre. Or nous avons reconnu que les constantes A, $A_1, \ldots, A_{m-1}$ ne pouvaient avoir chacune plus d'une valeur. Donc il n'est possible de décomposer la fraction que d'une seule manière en fractions simples de la forme proposée.

On conclut de là que pour les racines autres que la première a, il ne sera pas nécessaire de recommencer les calculs sur le polynôme P et les suivants. Il suffira de changer dans les équations (5) les quantités m, a et $\varphi(x)$, en celles qui se rapporteront à toute autre racine de l'équation $f(x)=0$; car c'est ce que l'on obtiendrait en commençant successivement par chacune d'elles.

220. Les calculs précédents exigent que l'on forme le polynôme $\varphi(x)$ qui est le quotient de la division de $f(x)$ par $(x-a)^m$. On peut se dispenser de faire cette opération, et exprimer $\varphi(a)$, $\varphi'(a), \ldots, \varphi^{m-1}(a)$, au moyen

des dérivées de la fonction $f(x)$ elle-même : on les substituera ensuite dans l'équation générale (4), de laquelle se tirent toutes les équations (5). Or, si l'on différentie les deux membres de l'équation

$$f(x) = (x-a)^m \varphi(x),$$

ils se réduiront à zéro par l'hypothèse $x=a$, si le nombre des différentiations est inférieur à m. Supposons-le donc égal à $m+p$, p étant un nombre entier et positif quelconque.

Il est inutile de répéter ici ce qui a été dit au sujet de l'équation (3), et l'on aura, en faisant $x=a$ dans les dérivées de l'ordre $m+p$,

$$f^{m+p}(a) = (m+p)(m+p-1)\ldots(p+1)\varphi^p(a);$$

d'où

$$\varphi^p(a) = \frac{f^{m+p}(a)}{(m+p)(m+p-1)\ldots(p+1)}.$$

L'équation (4) devient, par là,

$$\begin{aligned} F^p(a) = {} & A\frac{f^{m+p}(a)}{(m+p)(m+p-1)\ldots(p+1)} + A_1\frac{f^{m+p-1}(a)}{(m+p-1)\ldots(p+1)} \\ & + A_2\frac{f^{m+p-2}(a)}{(m+p-2)\ldots(p+1)} + \ldots + A_p\frac{f^m(a)}{m(m-1)\ldots(p+1)}. \end{aligned}$$

Si l'on donne à p toutes les valeurs depuis 0 jusqu'à $m-1$, on aura, pour déterminer $A, A_1, \ldots, A_{m-1}$, les m équations suivantes :

$$\begin{aligned} F(a) &= A\frac{f^m(a)}{m(m-1)\ldots2.1}, \\ F'(a) &= A\frac{f^{m+1}(a)}{(m+1)\ldots2} + A_1\frac{f^m(a)}{m(m-1)\ldots2}, \\ F''(a) &= A\frac{f^{m+2}(a)}{(m+2)\ldots3} + A_1\frac{f^{m+1}(a)}{(m+1)\ldots3} + A_2\frac{f^m(a)}{m\ldots3}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F^{m-1}(a) &= A\frac{f^{2m-1}(a)}{(2m-1)\ldots m} + A_1\frac{f^{2m-2}(a)}{(2m-2)\ldots m} + \ldots + A_{m-1}\frac{f^m(a)}{m}. \end{aligned}$$

221. Les calculs précédents peuvent s'appliquer aux racines imaginaires égales, aussi bien qu'aux racines réelles. Mais les réductions entre les termes homologues relatifs aux racines conjuguées ne donnent pas immédiatement des résultats aussi simples que le mode de décomposition que nous allons faire connaître.

Soient $\alpha \pm 6\sqrt{-1}$ deux racines multiples de l'ordre m de l'équation $f(x) = 0$, de sorte que l'on ait

$$f(x) = [(x-\alpha)^2 + 6^2]^m \varphi(x).$$

On posera

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Ax+B}{[(x-\alpha)^2+6^2]^m} + \frac{A_1x+B_1}{[(x-\alpha)^2+6^2]^{m-1}} + \ldots + \frac{A_{m-1}x+B_{m-1}}{(x-\alpha)^2+6^2} + \frac{P}{\varphi(x)},$$

ou

$$\begin{aligned} F(x) = (Ax+B)\varphi(x) + (A_1x+B_1)[(x-\alpha)^2+6^2]\varphi(x) + \ldots \\ + (A_{m-1}x+B_{m-1})[(x-\alpha)^2+6^2]^{m-1}\varphi(x) + P[(x-\alpha)^2+6^2]^m. \end{aligned}$$

Le nombre des coefficients indéterminés est égal au nombre des termes qu'il faut égaler de part et d'autre, en ayant égard à ceux du polynôme P. Mais nous nous proposons ici de déterminer seulement A, B, A_1, B_1,..., A_{m-1}, B_{m-1}. Or, si l'on fait $x = \alpha \pm 6\sqrt{-1}$ dans la dernière équation et dans ses dérivées successives, chacune des équations ainsi obtenues se partagera en deux autres, à cause de la quantité imaginaire $\sqrt{-1}$; et, de plus, il s'introduira dans chaque nouvelle équation deux nouveaux coefficients inconnus. Ainsi, la première déterminera A et B, la seconde A_1 et B_1; et la $m^{ième}$, A_{m-1} et B_{m-1}.

Ces mêmes formules s'appliqueraient aux autres racines imaginaires égales, en changeant convenablement

$$\alpha, \ 6, \ m, \ \varphi(x).$$

On pourrait encore, comme dans le cas des racines réelles égales, se dispenser de former le quotient $\varphi(x)$,

et faire dépendre sa valeur et celle de ses dérivées, pour $x = \alpha \pm 6\sqrt{-1}$, des valeurs que prennent, dans la même hypothèse, les dérivées de $f(x)$; mais les formules sont moins simples que dans le cas précédent.

222. Cela posé, revenons à l'intégration de la fonction $\frac{F(x)}{f(x)}dx$.

La décomposition de la fraction $\frac{F(x)}{f(x)}$, d'après les procédés qui viennent d'être exposés, conduira à l'intégration d'expressions ayant respectivement l'une des formes suivantes :

$$\frac{A\,dx}{x-a}, \quad \frac{A\,dx}{(x-a)^n}, \quad \frac{(Ax+B)\,dx}{(x-\alpha)^2+6^2}, \quad \frac{(Ax+B)\,dx}{[(x-\alpha)^2+6^2]^n}.$$

Examinons-les successivement.

1°. La première donne immédiatement

$$\int \frac{A\,dx}{x-a} = A\,l(x-a)+C.$$

2°. On trouvera, pour la seconde,

$$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^n} = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}}+C.$$

3°. Pour la troisième, on la décomposera comme il suit :

$$\frac{(Ax+B)\,dx}{(x-\alpha)^2+6^2} = \frac{A(x-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)^2+6^2} + \frac{(A\alpha+B)\,dx}{(x-\alpha)^2+6^2}.$$

La première de ces deux nouvelles fractions ayant pour numérateur le produit de A par la moitié de la différentielle du dénominateur, est la différentielle de

$$\frac{A}{2}\,l[(x-\alpha)^2+6^2].$$

Pour intégrer la seconde, on posera

$$x - \alpha = 6z, \quad \text{d'où} \quad dx = 6dz,$$

et elle devient

$$\frac{A\alpha + B}{6} \cdot \frac{dz}{1 + z^2},$$

ce qui est la différentielle de

$$\frac{A\alpha + B}{6} \text{ arc tang } z.$$

Donc

$$\int \frac{(Ax + B)dx}{(x-\alpha)^2 + 6^2} = \frac{A}{2} l[(x-\alpha)^2 + 6^2] + \frac{A\alpha + B}{6} \text{ arc tang } \frac{x-\alpha}{6} + C.$$

4°. Quant à la dernière expression

$$\frac{(Ax + B)dx}{[(x-\alpha)^2 + 6^2]^n},$$

on la décomposera ainsi

$$\frac{A(x-\alpha)dx}{[(x-\alpha)^2 + 6^2]^n} + \frac{(A\alpha + B)dx}{[(x-\alpha)^2 + 6^2]^n}.$$

La première partie est la différentielle de

$$\frac{A}{2(n-1)[(x-\alpha)^2 + 6^2]^{n-1}}.$$

Pour intégrer la seconde partie $\frac{(A\alpha + B)dx}{[(x-\alpha)^2 + 6^2]^n}$, on posera $x - \alpha = 6z$, et elle deviendra $\frac{A\alpha + B}{6^{2n-1}} \cdot \frac{dz}{(z^2 + 1)^n}$; tout sera donc réduit à intégrer $\frac{dz}{(z^2+1)^n}$: or on a identiquement

$$\frac{1}{(z^2+1)^n} = \frac{1 + z^2 - z^2}{(z^2+1)^n} = \frac{1}{(z^2+1)^{n-1}} - \frac{z^2}{(z^2+1)^n};$$

donc

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)^n} = \int \frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}} - \int \frac{z^2 dz}{(z^2+1)^n}.$$

Mais l'intégration par parties donnera

$$\int \frac{z^2 dz}{(z^2+1)^n} = -\frac{z}{2(n-1)(z^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}};$$

substituant dans la précédente, il vient

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)^n} = \frac{z}{(2n-2)(z^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}}.$$

L'intégration étant ramenée à une autre semblable, mais dans laquelle l'exposant de z^2+1 est diminué d'une unité, on parviendra, par une suite de réductions analogues, à l'intégrale de $\frac{dz}{z^2+1}$, qui est arc tang z. On obtiendra ainsi la formule suivante :

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)^n} = \frac{z}{(2n-2)(z^2+1)^{n-1}} \left[\begin{array}{l} 1 + \frac{2n-3}{2n-4}(z^2+1) + \frac{(2n-3)(2n-5)}{(2n-4)(2n-6)}(z^2+1)^2 + \ldots \\ + \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 5.3}{(2n-4)(2n-6)\ldots 4.2}(z^2+1)^{n-2} \end{array} \right]$$
$$+ \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 3.1}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4.2} \text{ arc tang } z + C.$$

Si l'on multiplie cette expression par $\frac{A\alpha+B}{6^{2n-1}}$, et qu'on remplace z par $\frac{x-\alpha}{6}$, on aura l'intégrale indéfinie de

$$\frac{(A\alpha+B)dx}{[(x-\alpha)^2+6^2]^n};$$

on connaîtra, par conséquent, celle de la fonction proposée

$$\frac{(Ax+B)dx}{[(x-\alpha)^2+6^2]^n}.$$

Ainsi, au moyen des méthodes qui viennent d'être ex-

posées, on pourra intégrer toute expression algébrique rationnelle.

Intégration des fonctions algébriques irrationnelles.

223. *Radicaux du second degré.* — Il n'y a qu'un très-petit nombre de fonctions irrationnelles que l'on sache intégrer sous forme finie. Nous allons examiner celles dont l'intégration peut s'effectuer avec une certaine généralité.

Nous commencerons par les fonctions où la seule quantité irrationnelle est un radical du second degré, sous lequel se trouve un polynôme du second degré: du reste, ce radical peut être combiné algébriquement avec x, d'une manière quelconque.

Comme on peut faire passer hors du radical le coefficient du terme qui renferme x^2, nous pouvons représenter la différentielle proposée, par

$$F(x, \sqrt{a+bx\pm x^2})dx.$$

Pour intégrer cette expression, il suffira de remplacer x par une fonction d'une autre variable telle, que les quantités x, dx et $\sqrt{a+bx\pm x^2}$ soient rationnelles; car on retombera dans la théorie précédente, qui donnera toujours le moyen d'effectuer l'intégration.

1°. Supposons que x^2 ait le signe + sous le radical. On pourra poser

$$\sqrt{a+bx+x^2} = z + x;$$

d'où

$$a+bx = 2zx + z^2, \quad bdx = 2zdx + 2xdz + 2zdz,$$

$$x = \frac{z^2-a}{b-2z}, \quad dx = -\frac{2(z^2-bz+a)}{(b-2z)^2},$$

$$\sqrt{a+bx+x^2} = \frac{z^2-bz+a}{2z-b}.$$

La différentielle proposée devient donc rationnelle par cette transformation. On aurait encore pu poser

$$\sqrt{a+bx+x^2}=\sqrt{a}+xz;$$

il en résulterait

$$b+x=2z\sqrt{a}+xz^2,\quad dx=2dz\sqrt{a}+z^2dx+2xzdz,$$

$$x=\frac{2z\sqrt{a}-b}{1-z^2},\quad dx=2\frac{z^2\sqrt{a}-bz+\sqrt{a}}{(1-z^2)^2}dz,$$

$$\sqrt{a+bx+x^2}=\frac{z^2\sqrt{a}-bz+\sqrt{a}}{1-z^2}.$$

La différentielle proposée devient donc encore rationnelle; mais cette transformation aurait l'inconvénient d'introduire des imaginaires si a était négatif.

On peut encore employer une troisième transformation quand les racines du trinôme $a+bx+x^2$ sont réelles; ce qui aura toujours lieu dans le cas où la transformation précédente ne peut se faire en quantités réelles. Soit

$$a+bx+x^2=(x-\alpha)(x-\beta),$$

α et β étant réels; posons

$$\sqrt{a+bx+x^2}=(x-\alpha)z,$$

on en tirera

$$x-\beta=(x-\alpha)z^2,\quad dx=z^2dx+2(x-\alpha)zdz,$$

$$x=\frac{\beta-\alpha z^2}{1-z^2},\quad dx=\frac{2z(\beta-\alpha)}{(1-z^2)^2}dz,$$

$$\sqrt{a+bx+x^2}=\frac{(\beta-\alpha)z}{1-z^2}.$$

2°. Dans le cas où x^2 serait affecté du signe — sous le radical, on ne pourrait employer la première de ces

trois transformations. On pourrait employer la seconde si a était positif. Enfin, si a était négatif, les racines du trinôme $a + bx - x^2$ seraient réelles, sans quoi le radical $\sqrt{a + bx - x^2}$ serait toujours imaginaire; alors on emploierait la troisième transformation qui n'exige que la réalité des racines du trinôme.

224. On pourrait encore rendre rationnelle une fonction algébrique qui renfermerait deux radicaux de la forme

$$\sqrt{a+x}, \quad \sqrt{b+x};$$

pour cela, on poserait

$$\sqrt{a+x} = z,$$

d'où

$$x = z^2 - a, \quad dx = 2zdz, \quad \sqrt{b+x} = \sqrt{z^2+b-a}.$$

Substituant ces valeurs dans la fonction différentielle donnée, elle ne renfermera qu'un seul radical du second degré qui affectera une expression du second degré en z. On retombe ainsi dans le cas précédent.

225. Appliquons ces transformations à quelques cas particuliers.

Soit

$$\frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}};$$

posant

$$\sqrt{a+bx+x^2} = z - x,$$

on en déduit

$$a + bx = -2xz + z^2, \quad dx = \frac{2(z-x)dz}{b+2z},$$

$$\frac{dx}{z-x} = \frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}} = \frac{2dz}{b+2z};$$

donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}} = \int \frac{dz}{\frac{1}{2}b+z} = \mathrm{l}\left(\tfrac{1}{2}b+z\right)+\mathrm{C}$$
$$= \mathrm{l}\left[\frac{b}{2}+x+\sqrt{a+bx+x^2}\right]+\mathrm{C}.$$

Dans le cas où l'on aurait $b=0$, on trouverait

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} = \mathrm{l}\left(x+\sqrt{a+x^2}\right)+\mathrm{C}.$$

226. Considérons maintenant

$$\frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}},$$

et posons

$$\sqrt{a+bx-x^2} = \sqrt{a}+xz,$$

d'où

$$b-x = 2z\sqrt{a}+xz^2, \quad \frac{dx}{\sqrt{a}+xz} = -\frac{2dz}{1+z^2};$$

donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} = \mathrm{C}-2\,\mathrm{arc\,tang}\,z = \mathrm{C}-2\,\mathrm{arc\,tang}\frac{\sqrt{a+bx-x^2}-\sqrt{a}}{x}.$$

Si les racines du trinôme $a+bx-x^2$ sont réelles, on peut employer la troisième transformation, et poser

$$\sqrt{a+bx-x^2} = (x-\alpha)z,$$

en supposant

$$x^2-bx-a = (x-\alpha)(x-6).$$

On aura d'abord

$$6-x = (x-\alpha)z^2, \quad -dx(1+z^2) = 2(x-\alpha)z dz,$$

$$\frac{dx}{(x-\alpha)z} = -\frac{2dz}{1+z^2};$$

donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} = C - 2 \operatorname{arc tang} \sqrt{\frac{6-x}{x-\alpha}}$$

$$= C - 2 \operatorname{arc tang} \sqrt{\frac{-2x+b+\sqrt{b^2+4a}}{2x-b+\sqrt{b^2+4a}}}$$

$$= C - \operatorname{arc tang} \frac{\sqrt{1-\left(\frac{2x-b}{\sqrt{b^2+4a}}\right)^2}}{\left(\frac{2x-b}{\sqrt{b^2+4a}}\right)} = C - \operatorname{arc cos} \frac{2x-b}{\sqrt{b^2+4a}}.$$

Dans le cas particulier où $b = 0$, $a = 1$, cette dernière formule donne

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = C - \operatorname{arc cos} x = C' + \operatorname{arc sin} x.$$

L'autre transformation donnerait, dans ce cas,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = C - 2 \operatorname{arc tang} \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} = C - \operatorname{arc tang} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = C + \operatorname{arc sin} x,$$

résultat identique au précédent.

227. On a souvent à intégrer des expressions de la forme suivante :

$$\frac{(\alpha x + 6)\,dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}.$$

On introduit alors au numérateur la différentielle de la quantité soumise au radical, et l'on décompose cette différentielle dans les deux suivantes :

$$\frac{\alpha\left(x-\frac{b}{2}\right)dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} + \frac{\left(6+\frac{\alpha b}{2}\right)dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}.$$

La première a pour intégrale $-\alpha\sqrt{a+bx-x^2}$, et la seconde rentre dans le cas précédent.

228. La différentielle $\frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}$ peut être intégrée d'une manière plus simple que par les transformations que nous venons d'effectuer, en la ramenant à la forme $\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$, expression qui a pour intégrale arc sin z. En effet, on a

$$\frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}=\frac{dx}{\sqrt{\frac{b^2}{4}+a-\left(x-\frac{b}{2}\right)^2}}=\frac{\frac{dx}{\sqrt{\frac{b^2}{4}+a}}}{\sqrt{1-\left(\frac{x-\frac{b}{2}}{\sqrt{\frac{b^2}{4}+a}}\right)^2}};$$

donc

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}=\text{arc sin}\,\frac{x-\frac{b}{2}}{\sqrt{\frac{b^2}{4}+a}}+\text{C}.$$

229. *Fonctions de monômes irrationnels.* — Si l'on a une fonction algébrique rationnelle des quantités $x^{\frac{m}{n}}$, $x^{\frac{p}{q}}$,..., $x^{\frac{r}{s}}$, il est facile de la rendre rationnelle, en même temps que dx; il suffira de poser $x=z^{nq\ldots s}$, on aura alors $dx=nq\ldots sz^{nq\ldots s-1}dz$, et tous les monômes $x^{\frac{m}{n}}$,..., $x^{\frac{r}{s}}$ seront rationnels en z.

230. *Différentielles binômes.* — On désigne sous ce nom les expressions de la forme $x^m(a+bx^n)^p dx$.

On peut toujours supposer m et n entiers; car s'ils étaient fractionnaires, la transformation indiquée dans le numéro précédent ramènerait à une expression semblable où les exposants de la variable seraient entiers. L'exposant p est fractionnaire; car s'il était entier, on développerait la puissance de $a+bx^n$, et l'on aurait à intégrer un

nombre fini de monômes. Les signes de ces trois exposants sont arbitraires; mais on peut toujours supposer n positif: en effet, s'il était négatif, on pourrait multiplier le binôme $a + bx^n$ par x^{-n} et ajouter np à l'exposant de x^m, qui pourrait alors devenir fractionnaire, mais que l'on rendrait entier par la transformation déjà indiquée. On peut donc toujours supposer m et n entiers et n positif.

231. Nous emploierons d'abord la méthode de substitution, et nous poserons $a + bx^n = z$, d'où

$$x = \left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{1}{nb}\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} dz,$$

et, par suite,

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx = \frac{1}{nb}\,z^p\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} dz.$$

Donc si $\frac{m+1}{n}$ est un nombre entier positif ou négatif, l'expression en z n'aura plus d'irrationnel que le monôme z^p, et on la rendra rationnelle par le procédé indiqué dans le numéro précédent. Si, par exemple, on a $p = \frac{r}{q}$, on posera $z = t^q$, ce qui revient à faire d'abord $a + bx^n = t^q$.

L'intégrabilité de la différentielle proposée est donc assurée quand $\frac{m+1}{n}$ est un nombre entier, quelles que soient d'ailleurs les deux quantités m et n.

232. On peut arriver à un autre cas d'intégrabilité en mettant la différentielle donnée sous la forme

$$x^{m+np}(ax^{-n}+b)^p\,dx.$$

En effet, si l'on applique la condition qui vient d'être trouvée en général, on trouve qu'on pourra l'intégrer si

$\frac{m+np+1}{-n}$ est un nombre entier, ou si $\frac{m+1}{n}+p$ est entier; condition qui pourra quelquefois être remplie quand la première ne le sera pas.

233. On peut appliquer l'intégration par parties à la même différentielle $x^m(a+bx^n)^p dx$, en considérant $x^{n-1}(a+bx^n)^p dx$ comme une différentielle exacte, dont l'intégrale est

$$\frac{1}{nb(p+1)}(a+bx^n)^{p+1}.$$

On obtiendra ainsi

$$\begin{aligned}\int x^m(a+bx^n)^p dx &= \int x^{m-n+1}x^{n-1}(a+bx^n)^p dx \\ &= \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)} - \frac{m-n+1}{nb(p+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}dx\end{aligned}$$

Mais

$$x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1} = ax^{m-n}(a+bx^n)^p + bx^m(a+bx^n)^p;$$

donc, en substituant, on aura

$$\begin{aligned}\int x^m(a+bx^n)^p dx &= \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)} \\ &- \frac{(m-n+1)a}{nb(p+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx - \frac{m-n+1}{n(p+1)}\int x^m(a+bx^n)^p dx.\end{aligned}$$

Si l'on réduit le dernier terme de cette équation avec l'expression semblable qui se trouve dans le premier membre, on obtiendra la formule

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}\int x^m(a+bx^n)^p dx &= \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{b(m+np+1)} \\ &- \frac{(m-n+1)a}{b(m+np+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx.\end{aligned}\right.$$

On est ainsi ramené à intégrer une différentielle du même genre que la première, et qui n'en diffère qu'en ce que l'exposant m est changé en $m-n$.

1°. Supposons que m soit positif et plus grand que n. En traitant cette nouvelle différentielle de la même manière que la précédente, on diminuera encore de n l'exposant de x; et en continuant ainsi, l'on sera ramené, après un nombre k d'intégrations, à la différentielle $x^{m-kn}(a+bx^n)^p dx$, et l'on effectuerait immédiatement l'intégration si l'on avait

$$m-kn=n-1, \quad \text{ou} \quad \frac{m+1}{n}=k+1.$$

Ce procédé conduira donc à l'intégrale cherchée toutes les fois que $m+1$ sera divisible par n. C'est le premier cas d'intégrabilité que nous avions reconnu.

2°. Si m était négatif, la formule (1) ramènerait la différentielle proposée à une autre moins simple, puisque l'exposant du facteur monôme y aurait une valeur numériquement plus grande. Mais si l'on tire de cette même équation la valeur de la seconde intégrale en fonction de la première, on aura une formule qui, dans le cas de l'exposant négatif, ramènera l'intégration proposée à une plus simple. Si en même temps on change $m-n$ en $-m$, on aura la formule suivante :

$$(2)\quad \begin{cases} \displaystyle\int x^{-m}(a+bx^n)^p dx = -\frac{x^{-m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{(m-1)a} \\ \displaystyle\qquad -\frac{b(m-np-n-1)}{(m-1)n}\int x^{-m+n}(a+bx^n)^p dx. \end{cases}$$

Au moyen de cette formule on abaissera l'exposant $-m$, puisqu'on le ramène à $-m+n$, et que n peut toujours être supposé positif. En continuant ainsi, l'on arrivera à l'exposant $-m+kn$, et l'on pourra intégrer si l'on a

$$-m+kn=n-1, \quad \text{ou} \quad \frac{-m+1}{n}=1-k.$$

Cette condition ramène encore au premier cas d'intégrabilité.

Lorsque la différentielle ne rentre pas dans ce cas, les formules (1) et (2) ramènent toujours l'exposant m à une valeur positive plus petite que n.

234. Les formules (1) et (2) ne peuvent être employées, la première lorsque l'on a $m+np+1=0$, la seconde lorsque $m=1$, parce qu'alors l'intégrale cherchée disparaît, et l'équation qui subsiste ne peut plus, par conséquent, en donner la valeur. Mais dans chacun de ces cas, l'une des conditions d'intégrabilité est satisfaite, et la différentielle devient rationnelle par la substitution que nous avons faite en premier lieu.

235. La manière dont nous avons fait usage de l'intégration par parties avait pour objet de réduire l'exposant de x en dehors de la parenthèse. Mais on pourrait la diriger de manière à réduire l'exposant du binôme $(a+bx^n)$.

En effet, si l'on considère $x^m dx$ comme différentielle, on trouvera

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1} - \frac{npb}{m+1}\int x^{m+n}(a+bx^n)^{p-1}dx.$$

Dans cette dernière intégrale on peut abaisser l'exposant $m+n$ sans changer l'exposant $p-1$, par le procédé employé dans le n° 233, et l'on obtiendra ainsi

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} \int x^m(a+bx^n)^p dx &= \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+np+1} \\ &+ \frac{anp}{m+np+1}\int x^m(a+bx^n)^{p-1}dx. \end{aligned} \right.$$

Cette formule deviendrait illusoire dans le cas déjà exa-

miné, où l'on aurait

$$m + np + 1 = 0.$$

En appliquant le même calcul à la différentielle

$$x^m(a + bx^n)^p dx,$$

on abaissera d'autant d'unités que l'on voudra l'exposant de $(a + bx^n)$, dans le cas où p sera positif, et l'on parviendra à un exposant compris entre 0 et 1. Celui du facteur x^m est resté le même; mais on pourra le réduire ensuite comme on l'a indiqué précédemment : et si la différentielle ne devient pas intégrable, elle sera du moins simplifiée le plus possible.

236. Si p est négatif, on tirera de l'équation (3) la valeur de la dernière intégrale, qui se trouvera ramenée à une plus simple. Changeant p en $-p$, pour expliciter son signe, puis mettant p au lieu de $p+1$, on obtient

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} \int x^m(a + bx^n)^{-p}dx &= \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{-p+1}}{an(p-1)} \\ &\quad - \frac{(m-np+n+1)}{an(p-1)} \int x^m(a+bx^n)^{-p+1}dx. \end{aligned} \right.$$

Cette formule ne deviendra illusoire que dans le cas où $p = 1$. Mais alors la différentielle proposée est rationnelle, à moins que m ne soit fractionnaire; et, dans ce cas, on emploierait une transformation déjà indiquée.

Au moyen de la formule (4), l'exposant négatif $-p$ peut être successivement augmenté d'autant d'unités que l'on voudra, et sera ramené à être compris entre 0 et $+1$. On pourra ensuite réduire l'exposant de x^m sans changer celui qui affectera le binôme $(a + bx^n)$.

237. Prenons d'abord pour exemple la différentielle $\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$, dans laquelle m désigne un nombre entier posi-

tif. Elle est toujours intégrable; car on a

$$n = 2, \quad p = -\tfrac{1}{2}.$$

Donc si $\frac{m+1}{n}$ n'est pas entier, $\frac{m+1}{n} + p$ le sera. Si on lui applique la formule (1), ou si on l'intègre directement par parties, on trouvera

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{m-1}{m}\int \frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

L'exposant m étant ainsi abaissé de deux unités, on arrivera, en continuant d'appliquer le même procédé, à l'une des deux expressions $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, suivant que m sera impair ou pair; la première a pour intégrale $-\sqrt{1-x^2}$; et la seconde, $\arcsin x$.

On parvient ainsi à la formule suivante, dans le cas de m impair,

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{m}\left[\begin{array}{l} x^{m-1} + \frac{m-1}{m-2}x^{m-3} + \frac{(m-1)(m-3)}{(m-2)(m-4)}x^{m-5} + \ldots \\ \quad + \frac{(m-1)(m-3)\ldots 2}{(m-2)(m-4)\ldots 1} \end{array}\right] + C.$$

On trouverait, dans le cas de m pair,

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{m}\left[x^{m-1} + \frac{m-1}{m-2}x^{m-3} + \ldots + \frac{(m-1)(m-3)\ldots 3}{(m-2)(m-4)\ldots 2}\right]$$
$$+ \frac{(m-1)(m-3)\ldots 3}{m(m-2)(m-4)\ldots 2}\arcsin x + C.$$

Si l'on supposait l'exposant négatif et représenté par $-m$, la formule de réduction serait la suivante :

$$\int \frac{x^{-m}dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{-m+1}\sqrt{1-x^2}}{m-1} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{x^{-m+2}dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Le seul cas où elle ne puisse être appliquée est celui où

$m=1$; il s'agit alors d'intégrer $\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$. On pourra employer pour cela la transformation relative aux radicaux du second degré, et poser

$$\sqrt{1-x^2}=1+xz;$$

d'où

$$-x=2z+xz^2,\quad -dx=2dz+2xzdz+z^2dx,$$

$$\frac{dx}{1+xz}=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{2dz}{1+z^2},\quad \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=\frac{dz}{z}.$$

Donc

$$\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=\mathrm{l}\,z+\mathrm{C}=\mathrm{l}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}\right)+\mathrm{C}.$$

On serait arrivé plus simplement au même résultat, en posant $x=\frac{1}{z}$, ce qui aurait donné $\frac{-dz}{\sqrt{z^2-1}}$, que nous avons intégré précédemment.

238. Considérons encore la différentielle binôme $\frac{x^m dx}{\sqrt{ax-x^2}}$, qui se rencontre dans le calcul des oscillations du pendule. On a identiquement

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{ax-x^2}}=\int\frac{x^{m-1}\left(x-\frac{a}{2}\right)dx}{\sqrt{ax-x^2}}+\frac{a}{2}\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{ax-x^2}}.$$

Mais, en intégrant par parties, on trouve

$$\int\frac{x^{m-1}\left(x-\frac{a}{2}\right)dx}{\sqrt{ax-x^2}}=-x^{m-1}\sqrt{ax-x^2}+(m-1)\int x^{m-2}dx\sqrt{ax-x^2}$$

$$=-x^{m-1}\sqrt{ax-x^2}+(m-1)\int\frac{x^{m-2}(ax-x^2)dx}{\sqrt{ax-x^2}}$$

$$=-x^{m-1}\sqrt{ax-x^2}+(m-1)a\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{ax-x^2}}-(m-1)\int\frac{x^m dx}{\sqrt{ax-x^2}};$$

substituant dans la première équation, et réduisant, il vient

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{ax-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{ax-x^2}}{m} + \frac{(2m-1)a}{2m}\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{ax-x^2}}.$$

L'exposant m étant abaissé d'une unité, si l'on applique le même procédé à la nouvelle différentielle et aux suivantes, on parviendra enfin à $\int \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}$. On obtiendra cette dernière en observant que

$$\frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \frac{dx}{\sqrt{\frac{a^2}{4}-\left(\frac{a}{2}-x\right)^2}} = \frac{\frac{2}{a}\,dx}{\sqrt{1-\left(\frac{a-2x}{a}\right)^2}};$$

donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \operatorname{arc\,cos}\frac{a-2x}{a} + C.$$

Intégration des fonctions exponentielles, logarithmiques, et circulaires.

239. Si l'on sait intégrer la différentielle $F(x)dx$, on saura aussi intégrer les suivantes, par une simple substitution :

$$F(e^x)\,e^x dx,\quad F(lx)\frac{dx}{x},\quad F(\sin x)\cos x dx,$$

$$F(\cos x)\sin x dx,\quad F(\operatorname{arc\,sin} x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$F(\operatorname{arc\,cos} x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad F(\operatorname{arc\,tang} x)\frac{dx}{1+x^2}.$$

On voit de même que si F désigne une fonction algé-

brique, on rendra algébriques les différentielles

$$F(e^x)dx, \quad F(\sin x, \cos x)dx,$$

$$F(\sin x, \sin 2x, \ldots, \cos x, \cos 2x, \ldots)dx,$$

en posant respectivement

$$e^x = z, \quad \sin x = z, \quad \text{ou} \quad \cos x = z.$$

240. Soit maintenant la différentielle $Pz^n dx$, dans laquelle z désigne une fonction transcendante.

Si l'on pose

$$\int P dx = Q, \quad \int Q \frac{dz}{dx} dx = R, \quad \int R \frac{dz}{dx} dx = S, \ldots$$

et que l'on puisse obtenir les fonctions désignées par Q, R, S, etc., l'intégration par parties fera connaître $\int Pz^n dx$. En effet, on aura

$$\int Pz^n dx = Qz^n - n \int Qz^{n-1} \frac{dz}{dx} dx,$$

$$\int Qz^{n-1} \frac{dz}{dx} dx = Rz^{n-1} - (n-1) \int Rz^{n-2} \frac{dz}{dx} dx,$$

et ainsi de suite. Donc

$$\int Pz^n dx = Qz^n - nRz^{n-1} + n(n-1)Sz^{n-2} - \ldots,$$

241. Si l'on suppose $P = 1$ et que l'on fasse successivement $z = 1x$, $z = \arcsin x$, on trouvera

$$\int 1^n x dx = x[1^n x - n 1^{n-1} x + n(n-1) 1^{n-2} x - \ldots \pm n(n-1) \ldots 2 . 1] + C,$$

$$\int (\arcsin x)^n dx = \left[x + \frac{n\sqrt{1-x^2}}{\arcsin x} - \frac{n(n-1)x}{(\arcsin x)^2} - \frac{n(n-1)(n-2)\sqrt{1-x^2}}{(\arcsin x)^3} + \ldots \right] (\arcsin x)^n + C.$$

Si l'on suppose $P = x^{m-1}$ et $z = 1x$, on aura

$$\int x^{m-1} 1^n x dx = \frac{x^m}{m} \left[1^n x - \frac{n}{m} 1^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{m^2} 1^{n-2} x - \ldots \pm \frac{n(n-1) \ldots 2 . 1}{m^n} \right] + C.$$

Si, dans la première et la dernière de ces trois formules, on pose $\mathrm{l}\,x = z$, elles deviennent

$$\int z^n e^z dx = e^z (z^n - n z^{n-1} + n(n-1) z^{n-2} - \ldots \pm n(n-1)\ldots 2.1) + C,$$

$$\int z^n e^{az} dz = \frac{e^{az}}{a}\left[z^n - \frac{n}{a} z^{n-1} + \frac{n(n-1)}{a^2} z^{n-2} - \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 2.1}{a^n}\right] + C;$$

si, dans la seconde, on pose arc sin $x = z$, d'où

$$x = \sin z, \quad dx = \cos z dz,$$

elle devient

$$\int z^n \cos z dz = \sin z[z^n - n(n-1) z^{n-2} + \ldots]$$
$$+ \cos z[n z^{n-1} - n(n-1)(n-2) z^{n-3} + \ldots] + C.$$

On peut d'ailleurs obtenir directement ces trois dernières formules, et en déduire réciproquement les trois premières.

242. Les deux intégrales $\int e^{ax} \cos bx dx$ et $\int e^{ax} \sin bx dx$ peuvent se déterminer à la fois, au moyen de l'intégration par parties. En effet, on trouve immédiatement

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax} \cos bx}{a} + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx dx,$$

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax} \sin bx}{a} - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx dx.$$

De ces deux équations on tire, pour ces intégrales, les valeurs suivantes :

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C,$$

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C.$$

243. On pourra encore déterminer les intégrales

$$\int x^n e^{ax} \cos bx dx, \quad \int x^n e^{ax} \sin bx dx,$$

en abaissant successivement l'exposant de x. Mais le cal-

cul sera simplifié au moyen de la formule ci-dessus, qui donne la valeur de $\int z^n e^{az} dz$, dans laquelle on remplacera a par $a + b\sqrt{-1}$. Elle devient alors, en substituant x à z,

$$\int x^n e^{ax} (\cos bx + \sqrt{-1} \sin bx) dx =$$

$$\frac{e^{ax} (\cos bx + \sqrt{-1} \sin bx)}{a + b\sqrt{-1}} \left[x^n - \frac{n x^{n-1}}{a + b\sqrt{-1}} + \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 2.1}{(a + b\sqrt{-1})^n} \right] + C.$$

Si l'on égale les parties réelles des deux membres, ainsi que les parties imaginaires, on aura les valeurs des deux intégrales cherchées.

244. Considérons maintenant les différentielles de la forme

$$\sin^m x \cos^n x dx.$$

Si l'on pose $\sin x = z$, d'où $\cos x dx = dz$, on obtient

$$z^m (1 - z^2)^{\frac{n-1}{2}} dz.$$

Elle rentre ainsi dans les différentielles binômes, et sera intégrable lorsque $\frac{m+1}{2}$ sera entier, c'est-à-dire lorsque m sera un nombre entier impair, ou lorsque n sera un nombre entier impair, ou lorsque $m + n$ sera un nombre entier pair. On aurait pu poser $\cos x = z$, et la différentielle serait devenue

$$z^n (1 - z^2)^{\frac{m-1}{2}} dz,$$

d'où l'on aurait tiré les mêmes conséquences.

245. Au lieu d'employer ces transformations, on peut traiter directement la différentielle proposée, au moyen de l'intégration par parties. On trouvera ainsi

$$(1) \int \sin^m x \cos^n x dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x dx,$$

Or

$$\int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x dx = \int (\sin^m x \cos^{n-2} x)(1 - \cos^2 x)\, dx$$
$$= \int \sin^m x \cos^{n-2} x dx - \int \sin^m dx \cos^n x dx;$$

substituant et réduisant, il vient

$$(2) \int \sin^m x \cos^n x dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x dx.$$

Donc, si n est positif, cette formule l'abaisse de deux unités, sans changer m; excepté toutefois le cas où $m + n = 0$, que nous examinerons plus tard.

En supposant que ce cas ne se présente pas jusqu'à la fin du calcul, et en continuant de diminuer l'exposant de $\cos x$, on le ramènera à 0 ou 1 s'il est entier.

246. En dirigeant autrement l'intégration par parties, on abaissera successivement l'exposant de $\sin x$. En effet, on a

$$(3) \int \sin^m x \cos^n x dx = -\frac{\cos^{n+1} x \sin^{m-1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x dx.$$

Or

$$\int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x dx = \int (\sin^{m-2} x \cos^n x)(1 - \sin^2 x)\, dx$$
$$= \int \sin^{m-2} x \cos^n x dx - \int \sin^m x \cos^n x dx.$$

Substituant dans la précédente, et réduisant, il vient

$$(4) \int \sin^m x \cos^n x dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} x \cos^n x dx.$$

Si donc on excepte encore le cas de $m + n = 0$, on abaissera l'exposant de $\sin x$ d'un nombre pair quelconque, et, s'il est entier, on parviendra à le réduire à zéro ou à l'unité sans que l'exposant de $\cos x$ ait changé. S'ils sont tous deux entiers, on les réduira successivement l'un et l'autre, autant que possible, sans les rendre négatifs, et

il restera à intégrer une des expressions suivantes :

$$\int dx,\quad \int \cos x dx,\quad \int \sin x dx,\quad \int \sin x \cos x dx,$$

que nous considérerons tout à l'heure.

247. Supposons maintenant que m étant positif, n soit négatif et remplacé par $-n$; la formule (2) donnera

$$\int \frac{\sin^m x}{\cos^n x} dx = \frac{\sin^{m+1} x}{(m-n)\cos^{n+1} x} + \frac{n+1}{m-n}\int \frac{\sin^m x}{\cos^{n+2} x} dx.$$

L'exposant de $\cos x$ se trouvant élevé de deux unités, on tirera la valeur de l'intégrale qui est dans le second membre, et l'on trouvera, en changeant $n+2$ en n,

$$(5)\quad \int \frac{\sin^m x}{\cos^n x} dx = \frac{\sin^{m+1} x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-m-2}{n-1}\int \frac{\sin^m x}{\cos^{n-2} x} dx.$$

Cette formule ne peut être appliquée dans le cas de $n=1$. Si en même temps m est entier, on l'abaissera au moyen de la formule (4), et l'on parviendra à

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx, \quad \text{ou} \quad \int \frac{dx}{\cos x},$$

expressions que nous intégrerons tout à l'heure.

248. Si, au contraire, n est positif et m négatif, remplaçons-le par $-m$ dans la formule (4), elle devient

$$\int \frac{\cos^n x}{\sin^m x} dx = \frac{\cos^{n+1} x}{(m-n)\sin^{m+1} x} + \frac{m+1}{m-n}\int \frac{\cos^n x}{\sin^{m+2} x} dx.$$

L'exposant de $\sin x$ étant augmenté de deux unités, on tirera la valeur de l'intégrale du second membre, et l'on aura, en remplaçant $m+2$ par m,

$$(6)\quad \int \frac{\cos^n x}{\sin^m x} dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{(m-1)\sin^{m-1} x} + \frac{m-n-2}{m-1}\int \frac{\cos^n x}{\sin^{m-2} x} dx.$$

Cette formule ne peut être appliquée si $m=1$; mais alors,

en abaissant l'exposant de $\cos x$, on arrivera, s'il est entier, à l'une des expressions $\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$, ou $\int \frac{dx}{\sin x}$.

249. Supposons enfin que m et n soient négatifs tous les deux, et remplaçons-les par $-m$ et $-n$. La formule (2) deviendra

$$\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} = \frac{-1}{(m+n)\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x} + \frac{n+1}{m+n}\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^{n+2} x},$$

ou, en tirant la valeur de la seconde intégrale, et changeant $n+2$ en n,

$$(7)\quad \int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} = \frac{1}{(n-1)\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x} + \frac{m+n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^{n-2} x}.$$

On tirera semblablement de la formule (4)

$$\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} = \frac{1}{(m+n)\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x} + \frac{m+1}{m+n}\int \frac{dx}{\sin^{m+2} x \cos^n x}.$$

Tirant de là la valeur de la dernière intégrale, et remplaçant $m+2$ par m, il vient

$$(8)\quad \int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} = \frac{-1}{(m-1)\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x} + \frac{m+n-2}{m-1}\int \frac{dx}{\sin^{m-2} x \cos^n x}.$$

Au moyen des formules (7) et (8) on diminuera du plus grand nombre pair possible, les exposants de $\sin x$ et $\cos x$. Il n'y aura d'exception que pour le cas de $m=1$ ou $n=1$, et alors on parvient, en supposant m et n entiers, à l'une des expressions suivantes :

$$\int \frac{dx}{\sin x}, \quad \int \frac{dx}{\cos x}, \quad \int \frac{dx}{\sin x \cos x}.$$

250. En réunissant les cas particuliers auxquels on est conduit par l'application de ces procédés, on voit que l'on est toujours ramené, quand les exposants sont en-

tiers, à effectuer l'une des intégrations suivantes :

$$\int dx,\ \int \cos dx,\ \int \sin x dx,\ \int \sin x \cos x dx,\ \int \frac{\sin x}{\cos x} dx,\ \int \frac{\cos x}{\sin x} dx,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x},\ \int \frac{dx}{\sin x},\ \int \frac{dx}{\cos x},\ \int \frac{\sin^m x}{\cos^m x} dx,\ \int \frac{\cos^m x}{\sin^m x} dx.$$

Les six premières s'obtiennent immédiatement, et ont pour valeurs respectives

$$\int dx = x + C,\quad \int \cos dx = \sin x + C,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C,\quad \int \sin x \cos x dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

Dans les deux suivantes le numérateur est la différentielle du dénominateur, abstraction faite du signe. Donc

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos x} = -\mathrm{l} \cos x + C,\quad \int \frac{\cos x dx}{\sin x} = \mathrm{l} \sin x + C.$$

On intégrera la suivante $\frac{dx}{\sin x \cos x}$ en divisant ses deux termes par $\cos^2 x$; elle devient alors

$$\int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \int \frac{d \operatorname{tang} x}{\operatorname{tang} x} = \mathrm{l} \operatorname{tang} x + C.$$

La suivante $\frac{dx}{\sin x}$ s'intégrera en divisant ses deux termes par $\cos^2 \frac{1}{2} x$, après avoir remplacé $\sin x$ par $2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$; elle devient alors

$$\int \frac{\frac{d \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}} = \int \frac{d. \operatorname{tang} \frac{x}{2}}{\operatorname{tang} \frac{x}{2}} = \mathrm{l} \operatorname{tang} \frac{x}{2} + C.$$

On ramènera l'intégrale $\int \frac{dx}{\cos x}$ à cette dernière, en observant que

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = -\int \frac{d\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = -\operatorname{l tang}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+C$$

$$= \operatorname{l tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)+C.$$

251. Il ne reste plus à intégrer que les deux expressions $\frac{\sin^n x}{\cos^n x}\,dx$ et $\frac{\cos^n x}{\sin^n x}\,dx$, qui rentrent l'une dans l'autre par le changement de x en $\frac{\pi}{2}-x$.

Or la formule (1) devient, en supposant n négatif et égal à $-m$,

$$\int \operatorname{tang}^m x dx = \frac{\operatorname{tang}^{m+1} x}{m+1} - \int \operatorname{tang}^{m+2} x dx,$$

et l'on en tirera, en remplaçant $m+2$ par m,

$$\int \operatorname{tang}^m x dx = \frac{\operatorname{tang}^{m-1} x}{m-1} - \int \operatorname{tang}^{m-2} x dx.$$

En continuant à abaisser l'exposant de deux unités, on parviendra à $\int dx$, ou $\int \operatorname{tang} x dx$, qui a été déterminée précédemment, puisqu'elle n'est autre chose que $\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$.

On aurait trouvé de même

$$\int \cot^m x dx = -\frac{\cot^{m-1} x}{m-1} - \int \cot^{m-2} x dx.$$

Cette formule ramènera, soit à $\int dx$, soit à $\int \cot x dx$, qui a été déjà déterminée, quand on a cherché $\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$.

252. En appliquant les principes précédents à la déter-

mination des intégrales

$$\int \sin^n x dx,\quad \int \cos^n x dx,\quad \int \tang^n x dx,$$

$$\int \cot^n x dx,\quad \int \frac{dx}{\sin^n x},\quad \int \frac{dx}{\cos^n x},$$

on trouve, 1° en supposant n pair,

$$\int \sin^n x dx = -\frac{\cos x}{n}\left[\sin^{n-1}x+\frac{n-1}{n-2}\sin^{n-3}x+\ldots+\frac{3.5\ldots(n-3)(n-1)}{2.4\ldots(n-4)(n-2)}\sin x\right]$$
$$+\frac{1.3\ldots(n-3)(n-1)}{2.4\ldots(n-2)n}x+C,$$

$$\int \cos^n x dx = \frac{\sin x}{n}\left[\cos^{n-1}x+\frac{n-1}{n-2}\cos^{n-3}x+\ldots+\frac{3.5\ldots(n-3)(n-1)}{2.4\ldots(n-4)(n-2)}\cos x\right]$$
$$+\frac{1.3\ldots(n-3)(n-1)}{2.4\ldots(n-2)n}x+C,$$

$$\int \tang^n x dx = \frac{\tang^{n-1}x}{n-1}-\frac{\tang^{n-3}x}{n-3}+\ldots\pm\tang x\mp x+C,$$

$$\int \cot^n x dx = -\frac{\cot^{n-1}x}{n-1}+\frac{\cot^{n-3}x}{n-3}-\ldots\pm\cot x\mp x+C.$$

$$\int \text{séc}^n x dx = \frac{\sin x}{n-1}\left[\text{séc}^{n-1}x+\frac{n-2}{n-3}\text{séc}^{n-3}x+\ldots+\frac{2.4\ldots(n-4)(n-2)}{1.3\ldots(n-5)(n-3)}\text{séc}\,x\right]+C,$$

$$\int \text{coséc}^n x dx = -\frac{\cos x}{n-1}\left[\text{coséc}^{n-1}x+\frac{n-2}{n-3}\text{coséc}^{n-3}x+\ldots+\frac{2.4\ldots(n-2)}{1.3\ldots n-3}\text{coséc}\,x\right]+C;$$

2°. En supposant n impair,

$$\int \sin^n x dx = -\frac{\cos x}{n}\left[\sin^{n-1}x+\frac{n-1}{n-2}\sin^{n-3}x+\ldots+\frac{2.4\ldots(n-3)(n-1)}{1.3\ldots(n-4)(n-2)}\right]+C,$$

$$\int \cos^n x dx = \frac{\sin x}{n}\left[\cos^{n-1}x+\frac{n-1}{n-2}\cos^{n-3}x+\ldots+\frac{2.4\ldots(n-3)(n-1)}{1.3\ldots(n-4)(n-2)}\right]+C,$$

$$\int \tang^n x dx = \frac{\tang^{n-1}x}{n-1}-\frac{\tang^{n-3}x}{n-3}+\ldots\pm\frac{\tang^2 x}{2}\pm l\cos x+C.$$

$$\int \cot^n x dx = -\frac{\cot^{n-1}x}{n-1}+\frac{\cot^{n-3}x}{n-3}-\ldots\pm\frac{\cot^2 x}{2}\mp l\sin x+C.$$

$$\int \text{séc}^n x\,dx = \frac{\sin x}{n-1}\left[\text{séc}^{n-1} x + \frac{n-2}{n-3}\,\text{séc}^{n-3} + \ldots + \frac{3.5\ldots(n-2)}{2.4\ldots(n-3)}\,\text{séc}^2 x\right]$$
$$+ \frac{1.3\ldots(n-2)}{2.4\ldots(n-1)}\,\mathrm{l}\,\text{tang}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\int \text{cosec}^n x\,dx = -\frac{\cos x}{n-1}\left[\text{coséc}^{n-1} x + \frac{n-2}{n-3}\,\text{coséc}^{n-3} x + \ldots + \frac{3.5\ldots(n-2)}{2.4\ldots(n-3)}\,\text{coséc}^2 x\right]$$
$$+ \frac{1.3\ldots(n-2)}{2.4\ldots(n-1)}\,\mathrm{l}\,\text{tang}\,\frac{x}{2} + C.$$

253. Observons qu'il est quelquefois plus simple de réduire les différentielles de la forme $\frac{dx}{\sin^m x \cos^n x}$, en les multipliant une ou plusieurs fois de suite par $\sin^2 x + \cos^2 x$, ce qui n'en change pas la valeur. Par exemple $\frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ se changera en $\frac{dx}{\cos^2 x} + \frac{dx}{\sin^2 x}$ dont l'intégrale est $\text{tang}\, x - \cot x + C$.

Remarquons encore que l'on pourra quelquefois, avec avantage, remplacer les puissances du sinus et du cosinus de x par leurs développements en fonctions linéaires des sinus et cosinus des multiples de x.

Nous terminerons par l'intégration de deux expressions qui se rencontrent souvent.

La première est $\frac{dx}{a + b\cos^2 x + c\sin^2 x}$. On l'intègre en posant $\text{tang}\, x = z$, et l'on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\ \text{arc tang}\, z\sqrt{\frac{a+c}{a+b}} + C.$$

Si $a + c$ et $a + b$ ne sont pas de même signe, cette expression se change en logarithme.

La seconde est $\frac{dx}{a + b\cos x}$: elle se ramène à la première en remplaçant $\cos x$ par $\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$, et l'on posera alors $\text{tang}\,\frac{x}{2} = z$.

Intégration par séries.

254. Lorsqu'on ne peut intégrer exactement une différentielle $F(x)dx$, on peut se proposer de développer son intégrale en série; et pour cela on développera d'abord la fonction $F(x)$. Soit donc

$$F(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{1}$$

et admettons que cette série soit convergente, sans quoi elle ne pourrait remplacer aucune fonction.

Soit s_n la somme des termes jusqu'à u_n inclusivement, et r_n le reste de la série, qui tend vers zéro à mesure que n augmente. On aura

$$F(x) = s_n + r_n.$$

Intégrons les deux membres de cette équation entre deux valeurs quelconques x_0 et X, nous aurons

$$\int_{x_0}^{X} F(x)dx = \int_{x_0}^{X} s_n dx + \int_{x_0}^{X} r_n dx;$$

et puisque r_n tend vers zéro, $\int_{x_0}^{X} r_n dx$ tend aussi vers zéro; donc

$$\int_{x_0}^{X} F(x)dx = \lim \int_{x_0}^{X} S_n dx = \int_{x_0}^{X} u_0 dx + \int_{x_0}^{X} u_1 dx + \ldots, \tag{2}$$

ou, en remplaçant X par x,

$$\int_{x_0}^{x} F(x)dx = \int_{x_0}^{x} u_0 dx + \ldots.$$

L'équation subsistera évidemment en prenant les intégrales indéfinies

$$\int F(x)dx = \int u_0 dx + \ldots.$$

255. Si la série (1) n'était pas convergente, pour la limite X, on pourrait craindre que la formule (2) ne fût inexacte; mais nous allons voir qu'elle subsiste encore, pourvu qu'elle soit convergente. En effet, elle est démontrée pour toute valeur de x comprise entre x et X; c'est-à-dire que l'on a pour ces valeurs

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{F}(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} u_0\,dx + \ldots + \int_{x_0}^{x} u_n\,dx + \ldots.$$

Or la limite de la somme des termes du second membre est une fonction déterminée et continue de x, puisque la série des intégrales est supposée convergente, même pour la valeur X. Si donc on fait tendre x vers X, les deux membres de l'équation tendront chacun vers une limite, et ces limites ne peuvent être inégales. Donc

$$\int_{x_0}^{\mathrm{X}} \mathrm{F}(x)\,dx = \int_{x_0}^{\mathrm{X}} u_0\,dx + \int_{x_0}^{\mathrm{X}} u_1\,dx + \ldots.$$

La même démonstration se ferait pour la limite x_0, et même pour toute valeur intermédiaire, pour laquelle la série (1) cesserait d'être convergente, sans que la série des intégrales cessât de l'être.

256. La fonction $\mathrm{F}(x)$ peut quelquefois être développée de bien des manières différentes en séries convergentes: on choisira celle qui conviendra le mieux à la question. Si on la développe suivant la formule de Maclaurin, on aura

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(0) + \mathrm{F}'(0)x + \mathrm{F}''(0)\frac{x^2}{1.2} + \ldots + \mathrm{F}^m(0)\frac{x^m}{1.2\ldots m} + \ldots,$$

et, par suite,

$$(3)\quad \int \mathrm{F}(x)dx = \mathrm{C} + \mathrm{F}(0)x + \mathrm{F}'(0)\frac{x^2}{1.2} + \mathrm{F}''(0)\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \mathrm{F}^m(0)\frac{x^{m+1}}{1.2\ldots(m+1)} + \ldots.$$

Il est facile de reconnaître que ce second membre n'est

autre chose que le développement de $\int F(x)\,dx$, d'après la formule de Maclaurin : C représente la valeur arbitraire de cette fonction pour $x = 0$.

Si l'on veut connaître l'erreur commise en s'arrêtant à un terme quelconque $F^{n-1}(0)\dfrac{x^n}{1.2\ldots n}$, dans la série (3), il suffira de multiplier $\dfrac{x^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}$ par la dérivée de l'ordre $(n+1)$ de la fonction $\int F(x)\,dx$, en donnant à x dans cette dérivée une valeur θx intermédiaire entre o et x. C'est la règle connue dans le cas de la formule de Maclaurin, dont l'équation (3) est l'application à la fonction $\int F(x)dx$. Si donc on désigne par k la plus grande valeur de $F^n(x)$ quand x passe de o à x, l'erreur commise en s'arrêtant au terme qui renferme x^n sera moindre que $\dfrac{kx^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}$.

257. On pourrait développer la fonction $\int F(x)\,dx$ par la formule de Bernoulli, qui donne pour une fonction quelconque y,

$$y = y_0 + x\frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{x^3}{1.2.3}\frac{d^3y}{dx^3} - \ldots;$$

y_0 étant la valeur de y correspondant à $x = 0$. Si l'on suppose

$$y = \int F(x)\,dx, \quad \text{et} \quad y_0 = C,$$

on aura

$$(4)\quad \int F(x)\,dx = C + xF(x) - \frac{x^2}{1.2}F'(x) + \frac{x^3}{1.2.3}F''(x) - \ldots.$$

On obtiendrait cette même formule en intégrant par parties la différentielle $F(x)\,dx$. En effet, on aura successi-

vement :

$$\int F(x)\,dx = xF(x) - \int xF'(x)\,dx,$$

$$\int xF'(x)\,dx = \frac{x^2}{1.2}F'(x) - \int \frac{x^2}{1.2}F''(x)\,dx,$$

$$\int \frac{x^2}{1.2}F''(x)\,dx = \frac{x^3}{1.2.3}F''(x) - \int \frac{x^3}{1.2.3}F'''(x)\,dx.$$

Si, en continuant indéfiniment ces intégrations, la dernière intégrale tend vers zéro, on aura, en faisant les substitutions et ajoutant la constante arbitraire,

$$\int F(x)\,dx = C + xF(x) - \frac{x^2}{1.2}F'(x) + \frac{x^3}{1.2.3}F''(x) - \ldots,$$

ce qui n'est autre chose que la formule (4).

258. Lorsque la fonction $F(x)$ est le produit de plusieurs facteurs, on peut se borner à développer l'un d'eux en série, pourvu que les autres facteurs multipliés par les divers termes de cette série donnent des produits intégrables.

Soit, par exemple, la différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}\sqrt{1 - bx}},$$

qui se rencontre dans le calcul du mouvement du pendule. On peut développer $(1 - bx)^{-\frac{1}{2}}$ si l'on suppose $bx < 1$, abstraction faite des signes, et l'on aura

$$(-bx)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}bx + \frac{1.3}{2.4}b^2x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}b^3x^3 + \ldots.$$

Substituant ce développement dans la différentielle proposée, on aura à intégrer des termes de la forme

$$\frac{x^m\,dx}{\sqrt{ax - x^2}},$$

expression que nous avons intégrée dans la théorie des différentielles binômes.

259. L'intégration par séries peut servir à faire connaître les développements des fonctions dont on sait développer les dérivées.

Ainsi, par exemple, la dérivée de *arc sin x* est $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ dont le développement est

$$1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\ldots;$$

donc

$$\text{arc}\sin x = C + x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots.$$

Mais il faut remarquer que le radical ayant été pris positivement, on suppose que l'arc et le sinus varient dans le même sens. La formule ne s'applique donc pas aux arcs compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π, mais elle convient aux arcs compris entre o et $+\frac{\pi}{2}$; elle conviendrait de même aux arcs entre o et $-\frac{\pi}{2}$. Elle doit, par conséquent, être satisfaite quand on y fait $x = 0$, et, par suite, C doit être nul; on a donc

$$\text{arc}\sin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots.$$

Le développement de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ n'est plus convergent pour $x = 1$; mais, comme la série des intégrales ne cesse pas de l'être, la formule précédente représente *arc sin x*, même lorsque $x = 1$. On a, pour cette valeur particulière,

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7} + \ldots.$$

Mais cette série serait trop peu convergente pour servir à calculer π.

260. On aura de même le développement de *arc tang x* en développant $\frac{1}{1+x^2}$, qui en est la dérivée.

Si l'on suppose $x < 1$, on ordonnera par rapport aux puissances croissantes de x, afin que la série soit convergente, et l'on aura

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots;$$

donc

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots.$$

L'arc étant nul avec sa tangente, on aura $C = 0$, et

$$\text{arc tang}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots.$$

Si, au contraire, on a $x > 1$, on aura, en ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de x,

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8} + \ldots;$$

donc

$$\text{arc tang}\, x = C - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \ldots.$$

La constante est $\frac{\pi}{2}$, puisque x infini rend le premier membre égal à $\frac{\pi}{2}$. Ainsi, pour les valeurs de x numériquement plus grandes que l'unité, on a

$$\text{arc tang}\, x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5}.$$

Il faut remarquer que la première formule donne les arcs

positifs depuis o jusqu'à $\frac{\pi}{4}$ seulement. La seconde ne convient qu'aux arcs compris entre cette limite et $\frac{\pi}{2}$ qui est la plus grande valeur du second membre.

Ces formules sont exactes pour $x = 1$, parce qu'elles restent convergentes, quoique les séries qui expriment la dérivée ne le soient plus; elles donnent alors

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

261. Cherchons encore de cette manière le développement de $l(1+x)$, dont la dérivée est $\frac{1}{1+x}$. Si l'on suppose $x < 1$, on a

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots;$$

donc

$$\int \frac{dx}{1+x} = C + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots.$$

Le logarithme de l'unité étant zéro, il faut supposer $C = 0$ pour que la formule représente $l(1+x)$, et l'on aura

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots.$$

Cette formule étant convergente pour $x = 1$, quoique la série qui exprime la dérivée ne le soit plus, elle ne cesse pas d'être exacte pour cette valeur particulière.

Si l'on supposait $x > 1$, et qu'on ordonnât le développement de $\frac{1}{1+x}$ par rapport aux puissances décroissantes de x afin qu'il fût convergent, on ne trouverait plus $l(1+x)$, mais seulement $l(1+x) - lx$, ou $l\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

Passage des intégrales indéfinies aux intégrales définies.

262. Nous avons démontré, dans le n° **207**, que si la dérivée d'une fonction quelconque $F(x)$ est continue pour toutes les valeurs de la variable depuis x_0 jusqu'à x, la différence $F(x) - F(x_0)$ est la limite de la somme des valeurs que prend $F'(x)\,dx$, lorsque l'on fait passer la variable de x_0 à x, par degrés infiniment petits représentés par dx ; d'où résulte la formule

$$(1) \qquad \int_{x_0}^{x} F'(x)dx = F(x) - F(x_0).$$

Ainsi, pour connaître l'intégrale définie de $F'(x)\,dx$ entre des limites données, lorsqu'on connaît l'intégrale indéfinie, ou une fonction quelconque $F(x)$ ayant pour dérivée $F'(x)$, il suffit de substituer les limites de l'intégrale dans $F(x)$, et de retrancher le résultat relatif à la plus petite limite, de celui qui se rapporte à la plus grande.

Exemples :

$$\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}, \quad \int_0^\infty e^{-x}dx = 1, \quad \int_0^\infty e^{-ax}dx = \frac{1}{a}, \quad \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2a},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{a}, \quad \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{\pi}{b},$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}, \qquad \int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x\,dx = \frac{2.4.6..\,2k}{3.5.7...(2k+1)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+1} x\,dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x\,dx = \frac{1.3.5..\,(2k-1)}{2.4.6...2k}\frac{\pi}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k} x\,dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2i} x \sin^{2k+1} x dx = \frac{2.4.6\ldots 2k}{(2i+1)(2i+3)\ldots(2i+2k+1)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2i} x \sin^{2k} x dx = \frac{1.3.5\ldots(2i-1)\,1.3.5\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots(2i+2k)}\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{2k}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots 2k}\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{2k+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2.4.6\ldots 2k}{3.5.7\ldots(2k+1)}.$$

Ces dernières intégrales rentrent dans deux des précédentes en posant $x = \sin z$; d'où $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dz$.

L'intégrale indéfinie de $\dfrac{x^{2m}dx}{x^{2n}+1}$ peut être déterminée en décomposant en fractions simples l'expression $\dfrac{x^{2m}}{x^{2n}+1}$, dans laquelle on peut toujours supposer $m < n$. D'après cela, si l'on fait $\dfrac{2m+1}{2n} = a$, on obtiendra

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}\,dx}{x^{2n}+1} = \frac{\pi}{n}\left[\sin a\pi + \sin 3a\pi + \sin 5a\pi + \ldots + \sin(2n-1)a\pi\right] = \frac{\pi}{n \sin a\pi}.$$

On aura encore, en supposant que m et n soient des nombres entiers positifs, tels que $m < n$,

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n \sin \dfrac{m\pi}{n}}.$$

Si maintenant on pose $x^n = z$, $\dfrac{m}{n} = a$, cette équation devient $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{z^{a-1}dz}{1+z} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$, a ayant une valeur commen-

Passage des intégrales indéfinies aux intégrales définies.

262. Nous avons démontré, dans le n° **207**, que si la dérivée d'une fonction quelconque $F(x)$ est continue pour toutes les valeurs de la variable depuis x_0 jusqu'à x, la différence $F(x) - F(x_0)$ est la limite de la somme des valeurs que prend $F'(x)\,dx$, lorsque l'on fait passer la variable de x_0 à x, par degrés infiniment petits représentés par dx; d'où résulte la formule

$$\int_{x_0}^{x} F'(x)\,dx = F(x) - F(x_0). \tag{1}$$

Ainsi, pour connaître l'intégrale définie de $F'(x)\,dx$ entre des limites données, lorsqu'on connaît l'intégrale indéfinie, ou une fonction quelconque $F(x)$ ayant pour dérivée $F'(x)$, il suffit de substituer les limites de l'intégrale dans $F(x)$, et de retrancher le résultat relatif à la plus petite limite, de celui qui se rapporte à la plus grande.

Exemples :

$$\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1},\quad \int_0^\infty e^{-x}dx = 1,\quad \int_0^\infty e^{-ax}dx = \frac{1}{a},\quad \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2a},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{a},\quad \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\pi}{2},\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{\pi}{b},$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2},\qquad \int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x\,dx = \frac{2.4.6\ldots 2k}{3.5.7\ldots(2k+1)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+1} x\,dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x\,dx = \frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots 2k}\,\frac{\pi}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k} x\,dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2i} x \sin^{2k+1} x\,dx = \frac{2.4.6\ldots 2k}{(2i+1)(2i+3)\ldots(2i+2k+1)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2i} x \sin^{2k} x\,dx = \frac{1.3.5\ldots(2i-1)\,1.3.5\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots(2i+2k)}\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{2k}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots 2k}\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{2k+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2.4.6\ldots 2k}{3.5.7\ldots(2k+1)}.$$

Ces dernières intégrales rentrent dans deux des précédentes en posant $x = \sin z$; d'où $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dz$.

L'intégrale indéfinie de $\frac{x^{2m}dx}{x^{2n}+1}$ peut être déterminée en décomposant en fractions simples l'expression $\frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}$, dans laquelle on peut toujours supposer $m < n$. D'après cela, si l'on fait $\frac{2m+1}{2n} = a$, on obtiendra

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}dx}{x^{2n}+1} = \frac{\pi}{n}\left[\sin a\pi + \sin 3a\pi + \sin 5a\pi + \ldots + \sin(2n-1)a\pi\right] = \frac{\pi}{n \sin a\pi}.$$

On aura encore, en supposant que m et n soient des nombres entiers positifs, tels que $m < n$,

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}.$$

Si maintenant on pose $x^n = z$, $\frac{m}{n} = a$, cette équation devient $\int_0^{\infty} \frac{z^{a-1}dz}{1+z} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$, a ayant une valeur commen-

surable quelconque comprise entre o et 1, et pouvant avoir aussi, par conséquent, toute valeur incommensurable comprise entre les mêmes limites.

On trouvera encore, d'après une formule précédemment démontrée, en supposant $n > 1$,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\frac{\pi}{2}.$$

Il faut bien remarquer que la formule (1) ne subsisterait plus si la fonction $F(x)$ devenait infinie entre les limites de l'intégration. Dans ce cas, la somme des éléments $F'(x)\,dx$ peut être infinie, ou indéterminée. Il faudra donc toujours s'assurer si $F(x)$ ne devient pas infini dans cet intervalle, et c'est seulement lorsque cette circonstance ne se présentera pas, que l'on pourra dire que $F(x) - F(x_0)$ est la limite de la somme des éléments tels que $F'(x)\,dx$. Dans le cas contraire, on partage l'intégrale en deux autres ayant pour limite commune la valeur particulière de x, et l'on examine séparément chacune d'elles.

Si, par exemple, on cherche $\int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x^4}$, la formule (1) donnera $-\frac{1}{3b^3} - \frac{1}{3a^3}$, expression qui est négative, tandis que tous les éléments sont positifs. Mais $\frac{1}{x^4}$ devenant infini pour $x = 0$, il faut s'assurer si l'intégrale ne le devient pas aussi. C'est ce qui arrive en effet, et la formule (1) suppose que cette circonstance n'arrive pas.

Dans le cas actuel, les deux intégrales partielles sont infinies de même signe; par conséquent il n'y a pas indétermination, et l'intégrale demandée est infinie.

Considérons encore l'intégrale $\int \frac{dx}{x}$. Si les deux limites

sont négatives, on a une somme d'éléments négatifs, qui seraient les mêmes, au signe près, que si l'on prenait ces limites positives. Ainsi l'on aura

$$\int_{-a}^{-b}\frac{dx}{x}=1b-1a=1\frac{b}{a}.$$

Il n'y aurait de même aucune difficulté pour deux limites positives; mais si elles sont des signes différents, l'intégrale $1x$ passant par l'infini, la formule (1) n'est plus démontrée; et il y a cela de remarquable, que la somme des éléments est réellement indéterminée.

En effet, soit l'intégrale définie $\int_{-a}^{+b}\frac{dx}{x}$; partageons-la en deux autres, dont les limites soient $-a$, $-\varepsilon\mu$ pour la première, et $+\varepsilon\nu$, $+b$ pour la seconde; ε étant une quantité qui tend vers zéro, et μ, ν deux nombres constants arbitraires. La première intégrale aura pour valeur $1\frac{\varepsilon\mu}{a}$, et la seconde $1\frac{b}{\varepsilon\nu}$; leur somme sera $1\frac{\mu}{\nu}+1\frac{b}{a}$. Elle ne renfermera plus ε, et, par conséquent, si l'on fait tendre cette quantité vers zéro, on aura pour la somme des deux intégrales, ou pour l'intégrale $\int_{-a}^{b}\frac{dx}{x}$, la quantité indéterminée $1\frac{b}{a}+1\frac{\mu}{\nu}$, qui dépend du rapport arbitraire des intervalles infiniment décroissants $\varepsilon\mu$, $\varepsilon\nu$. Si on les suppose égaux, $1\frac{\mu}{\nu}$ devient $1\,1$ ou zéro, et il reste $1\frac{b}{a}$. C'est ce que M. Cauchy appelle la *valeur principale* de l'intégrale indéterminée.

263. Lorsque l'on applique l'intégration par parties à la transformation des intégrales définies, et qu'on donne les mêmes limites aux intégrales, il est facile de voir, en général, comment doit être déterminée la constante.

En effet, on a

$$\int f(x)d\varphi(x) = f(x)\varphi(x) - \int \varphi(x)df(x).$$

Si l'on veut que les intégrales soient prises entre les mêmes limites x_0 et X, on commencera par les prendre à partir de x_0; mais alors il est nécessaire d'ajouter une constante arbitraire à l'un des membres, ce qui donne

$$\int_{x_0}^{x} f(x)d\varphi(x) = C + f(x)\varphi(x) - \int_{x_0}^{x} \varphi(x)d.f(x).$$

Pour que cette équation ait lieu en faisant $x = x_0$, il faut que l'on ait $C = -f(x_0)\varphi(x_0)$, et, par conséquent,

$$\int_{x_0}^{X} f(x)d.\varphi(x) = f(X)\varphi(X) - f(x_0)\varphi(x_0) - \int_{x_0}^{X} \varphi(x)d.f(x).$$

264. Si l'on renverse les limites d'une intégrale définie, on ne fait que changer son signe; car les accroissements de x changent de signe, et les valeurs absolues des éléments différentiels ne changent pas. On a donc

$$\int_{x_0}^{X} F(x)dx = -\int_{X}^{x_0} F(x)dx,$$

ce qui s'accorde avec l'expression de l'intégrale définie au moyen de la fonction $\varphi(x)$ dont la dérivée est $F(x)$. En effet, on a

$$\int_{x_0}^{X} F(x)dx = \varphi(X) - \varphi(x_0), \quad \int_{X}^{x} = \varphi(x_0) - \varphi(X),$$

expressions égales et de signes contraires.

265. On peut changer l'intégrale $\int_{x_0}^{X} F(x)\,dx$ dans la suivante :

$$\int_{x_0}^{X} F(X + x_0 - x)\,dx,$$

dont les limites sont les mêmes. En effet, les éléments qui les composent l'une et l'autre sont les mêmes en ordre inverse. En partant de cette remarque, qui est quelquefois utile, on peut, par une suite d'intégrations par parties, obtenir très-simplement la série de Taylor, comme on va le voir.

266. *Série de Taylor.* — Soit $F(x)$ une fonction quelconque qui reste continue, ainsi que ses n premières dérivées, entre les limites x et $x+h$. On a évidemment

$$F(x+h)-F(x)=\int_0^h F'(x+z)\,dz;$$

et, d'après ce qui vient d'être dit,

$$\int_0^h F'(x+z)\,dz=\int_0^h F'(x+h-z)\,dz:$$

x est constant dans cette intégration, z seul varie.

Intégrant par parties cette dernière expression et celles qui s'en déduisent, il vient

$$\int F'(x+h-z)\,dz = zF'(x+h-z)+\int zF''(x+h-z)\,dz$$

$$= zF'(x+h-z)+\frac{z^2}{1.2}F''(x+h-z)+\int\frac{z^2}{1.2}F'''(x+h-z)\,dz=\ldots$$

$$=\frac{z}{1}F'(x+h-z)+\frac{z^2}{1.2}F''(x+h-z)+\ldots+\frac{z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{n-1}(x+h-z)$$

$$+\int\frac{z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^n(x+h-z)\,dz.$$

Si l'on prend les intégrales entre les limites o et h, il faudra faire successivement $z=h$, $z=o$ dans les termes en dehors du signe $\int$, puis retrancher le dernier résultat du premier, ce qui donnera

$$\int_0^h F'(x+h-z)\,dz = hF'(x)+\frac{h^2}{1.2}F''(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{n-1}(x)$$

$$+\int_0^h\frac{z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^n(x+h-z)\,dz.$$

Mais

$$F(x+h)-F(x)=\int_0^h F'(x+h-z)\,dz;$$

donc

$$F(x+h)=F(x)+hF'(x)+\frac{h^2}{1.2}F''(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{n-1}(x)$$
$$+\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\int_0^h z^{n-1}F^n(x+h-z)\,dz.$$

Lorsque le terme qui renferme l'intégrale définie tend vers zéro à mesure que n augmente, la série converge vers $F(x+h)$, et devient celle que Taylor a fait connaître.

On peut donner une autre forme au terme qui exprime l'erreur commise; en s'arrêtant au terme de rang n. En effet, l'intégrale définie est égale à la somme des facteurs $z^{n-1}dz$, multipliée par une valeur moyenne entre la plus petite et la plus grande de celles que prend $F^n(x+h-z)$ quand z passe de 0 à h; et comme cette fonction est supposée continue dans cet intervalle, cette moyenne est l'une des valeurs que prend $F^n(x+h-z)$, pour une certaine valeur de z comprise entre 0 et h: d'où résulte aussi pour $h-z$ une valeur comprise entre 0 et h, que nous représenterons par θh. Le terme qui complète le développement devient donc

$$\frac{F^n(x+\theta h)}{1.2\ldots(n-1)}\int_0^h z^{n-1}dz,\quad \text{ou}\quad \frac{h^n}{1.2\ldots n}F^n(x+\theta h).$$

C'est sous cette forme que nous l'avons présentée dans le Calcul différentiel : θ est une fonction inconnue de x, et l'on sait seulement qu'elle a une valeur positive plus petite que l'unité.

En prenant la plus petite et la plus grande des valeurs de $F^n(x)$ dans l'intervalle de x à $x+h$, on aura deux limites entre lesquelles sera comprise l'erreur commise en

s'arrêtant après le $n^{ième}$ terme. L'intégrale définie donne la valeur exacte de cette erreur; mais elle présente la difficulté de l'intégration, et l'on ne peut généralement se proposer que de la renfermer entre deux limites connues.

Différentiation et intégration sous le signe $\int$.

267. Nous avons fait connaître, au commencement de ce Cours, les règles pour différentier les fonctions explicites, ainsi que celles qui sont liées entre elles et avec la variable principale par des équations dont les deux membres sont des fonctions explicites. Nous allons considérer une autre espèce de fonction et donner le moyen de la différentier.

Soit la fonction $u = \int_{z_0}^{Z} F(z, x)\,dz$ que l'on se propose de différentier par rapport à x; les limites z_0, Z, pouvant être des fonctions quelconques de x.

On aura, en considérant cette intégrale comme une fonction composée de z_0, Z, x, qui sont toutes des fonctions de x,

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{du}{dz_0}\right)\frac{dz_0}{dx} + \left(\frac{du}{dZ}\right)\frac{dZ}{dx} + \left(\frac{du}{dx}\right).$$

Or on a d'abord

$$\frac{du}{dz_0} = -F(z_0, x), \quad \frac{du}{dZ} = F(Z, x).$$

Quant au troisième terme $\frac{du}{dx}$, qui est relatif à la supposition de z_0 et Z constants, il est la limite de

$$\frac{\int_{z_0}^{Z} F(z, x+h)\,dz - \int_{z_0}^{Z} F(z, x)\,dz}{h},$$

ou de

$$\int_{z_0}^{Z} \frac{F(z, x+h) - F(z, x)}{h} dz,$$

et a pour valeur

$$\int_{z_0}^{Z} \frac{dF(z, x)}{dx} dz.$$

Donc

$$\frac{d}{dx} \int_{z_0}^{Z} F(z, x) dz = F(Z, x) \frac{dZ}{dx} - F(z_0, x) \frac{dz_0}{dx}$$
$$+ \int_{z_0}^{Z} \frac{dF(z, x)}{dx} dz.$$

On parviendrait très-simplement à la même formule, en considérant l'intégrale définie comme représentant l'aire d'une courbe.

Si les limites sont constantes, c'est-à-dire indépendantes de x, on a

$$\frac{d}{dx} \int_{z_0}^{Z} F(z, x) dz = \int_{z_0}^{Z} \frac{dF(z, x)}{dx} dz;$$

on voit qu'alors les deux opérations de différentiation et d'intégration peuvent se faire dans un ordre quelconque.

268. Si la fonction de x était une intégrale indéfinie par rapport à z, on la mettrait sous la forme

$$u = \int_{z_0}^{z} F(z, x) dz + C,$$

C étant une fonction quelconque de x; d'où

$$\frac{du}{dx} = \int_{z_0}^{z} \frac{dF(z, x)}{dx} dz + \frac{dC}{dx}.$$

On peut donc faire, dans un ordre quelconque, les

deux opérations sur $F(z, x)$, pourvu que les constantes relatives aux deux intégrations soient liées par la condition, que la seconde soit la dérivée de la première par rapport à x.

269. Si au lieu de différentier $\int_{z_0}^{z} F(z, x)\,dz$, on avait à l'intégrer par rapport à x entre les limites x_0, X; z_0 et Z étant supposées indépendantes de x, on observerait, d'après ce qui précède, que, quel que soit z,

$$\int_{x_0}^{x} dx \int_{z_0}^{z} F(z, x)\,dz, \quad \text{et} \quad \int_{z_0}^{z} dz \int_{x_0}^{x} F(z, x)\,dx$$

ont la même dérivée par rapport à x; et comme elles deviennent nulles toutes deux pour $x = x_0$, elles sont aussi égales quel que soit x. L'ordre des deux opérations est donc encore indifférent. Tout cela suppose que la fonction $F(z, x)$ ne devient ni infinie ni indéterminée, pour aucune valeur de x et z comprise entre les limites : si cela arrivait, il faudrait un examen particulier dont nous nous occuperons tout à l'heure.

270. Si les deux intégrales étaient indéfinies, la première serait

$$\int_{z_0}^{z} F(z, x)\,dz + \varphi(x);$$

en l'intégrant, on trouverait

$$\int_{x_0}^{x} dx \int_{z_0}^{z} F(z, x)\,dz + f(z) + \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx,$$

ce qu'on peut mettre sous la forme

$$\int_{x_0}^{x} dx \int_{z_0}^{z} F(z, x)\,dz + f(z) + f_1(x),$$

et l'on trouverait un résultat identique en intégrant en

ordre inverse; les fonctions f et f_1 pouvant toujours être regardées comme les mêmes dans les deux cas, puisqu'elles sont entièrement arbitraires.

271. *Intégrales définies singulières.* — M. Cauchy a désigné sous ce nom, des intégrales prises entre des limites qui se rapprochent indéfiniment d'une valeur particulière de la variable, qui rend la fonction infinie.

Par exemple, si l'on suppose $F(a)$ infinie, l'intégrale $\int_{a-\varepsilon}^{a-\mu\varepsilon} F(x)\,dx$ sera une intégrale définie singulière, si ε tend vers zéro, μ étant un nombre fini quelconque. On peut mettre la fonction différentielle sous la forme $(x-a)\,F(x)\,\frac{dx}{x-a}$; et si l'on désigne par ξ une valeur moyenne entre $a-\varepsilon$ et $a-\mu\varepsilon$, l'intégrale sera égale à

$$(\xi-a)\,F(\xi)\int_{a-\varepsilon}^{a-\mu\varepsilon}\frac{dx}{x-a}, \quad \text{ou} \quad (\xi-a)\,F(\xi)\,l\,\mu.$$

Si $(\xi-a)\,F(\xi)$ a une limite différente de zéro quand ξ tend vers a, l'intégrale définie singulière aura une valeur déterminée en même temps que μ. Nous allons voir à quoi cette considération peut être utile dans la détermination des intégrales définies.

272. *Cas où la fonction sous le signe $\int$ passe par l'infini.* — Si une valeur $x=a$ rend $F(x)$ infinie, et se trouve comprise dans les limites de l'intégrale $\int_\alpha^\beta F(x)\,dx$, on formera d'abord $\int_\alpha^{a-\varepsilon} F(x)\,dx$, puis $\int_{a+\varepsilon}^{\beta} F(x)\,dx$; on les ajoutera, puis on fera tendre ε vers zéro: la limite est ce que M. Cauchy nomme *la valeur principale* de l'intégrale. On pourra avoir une valeur différente si l'on cherche la limite de la somme des deux intégrales sui-

vantes :

$$\int_{\alpha}^{a-\mu\varepsilon} F(x)\,dx,\quad \int_{a+\nu\varepsilon}^{\beta} F(x)\,dx,$$

ε tendant toujours vers zéro, et les nombres μ, ν étant différents; car il y aurait, de plus, les deux intégrales

$$\int_{a-\varepsilon}^{a-\mu\varepsilon} F(x)\,dx,\quad \text{et}\quad \int_{a+\nu\varepsilon}^{a+\varepsilon} F(x)\,dx.$$

Et si leur somme ne tend pas vers zéro avec ε, on aura une valeur différente de la première, que nous avons nommée valeur principale; mais il est évident que cela n'arrivera jamais lorsque les intégrales $\int_{\alpha}^{a} F(x)\,dz$, $\int_{a}^{6} F(x)\,dx$ seront finies. Or les deux dernières intégrales définies singulières ont pour limite de leur somme $\mathrm{K}\,\mathrm{l}\frac{\mu}{\nu}$, K étant la limite de $(x-a)\,F(x)$ quand x tend vers a, et supposée de même signe quand x est $< a$, ou $> a$ (le cas contraire n'offre, au reste, rien d'embarrassant). Si donc K n'est pas nul, l'intégrale $\int_{\alpha}^{6} F(x)\,dx$ est indéterminée; mais sa valeur principale est déterminée, soit finie, soit infinie.

Si K est nul, on ne peut pas dire que $\mathrm{K}\,\mathrm{l}\frac{\mu}{\nu}$ soit nécessairement nul, puisque $\mathrm{l}\frac{\mu}{\nu}$ peut être infini.

Par exemple, si $\nu=\varepsilon$, $\mathrm{l}\frac{\mu}{\nu}$ est infini, et la seconde intégrale singulière est $\int_{a+\varepsilon^2}^{a+\varepsilon} F(x)\,dx$.

Ainsi, $\int_{\varepsilon}^{\nu\varepsilon} \frac{dx}{x\,\mathrm{l}\,x} = \mathrm{l}\left(1+\frac{\mathrm{l}\nu}{\mathrm{l}\varepsilon}\right)$, et si $\nu=\varepsilon$, on a l 2.

Mais dans cet autre exemple $\int_{\varepsilon}^{\nu\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{x}}$, on a $\frac{\xi}{\sqrt{\xi}}\, l\, \nu$, ou $\sqrt{\xi}\, l\, \nu$, ξ étant un intermédiaire entre ε et $\nu\varepsilon$; de sorte que $\xi = K\nu\varepsilon$ et $K > 1$: par là $\sqrt{\xi}\, l\, \nu$ devient $\sqrt{K\varepsilon}\sqrt{\nu}\, l\,.\,\nu$. Mais on sait que $\sqrt{\nu}\, l\, \nu$ est nul pour $\nu = 0$; donc $\int_{\varepsilon}^{\nu\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ est nul, comme d'ailleurs on l'aurait vu en effectuant l'intégration.

273. Si l'on suppose une des limites infinie, on aura à considérer l'intégrale $\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\mu\varepsilon}} F(x)\, dx$; et pour que l'intégrale proposée soit finie, il faudra que celle-ci tende vers zéro avec ε, quelque petit que soit μ: il faudra donc que $\frac{1}{K\mu\varepsilon} F\left(\frac{1}{K\mu\varepsilon}\right) l\, \mu$ tende vers zéro quel que soit μ, K étant > 1.

Soit $F(x) = \frac{x^m + \ldots}{Ax^n + \ldots}$; $F\left(\frac{1}{K\mu\varepsilon}\right)$ pourra être remplacé par $\frac{1}{A}(K\mu\varepsilon)^{n-m}$, et il faudra que $\mu\varepsilon^{n-m-1}\, l\, \mu$ tende vers zéro, ce qui exige $n > m + 1$; et cela est suffisant.

On pourra ainsi, au moyen des intégrales définies singulières, reconnaître si les intégrales cherchées deviennent infinies ou indéterminées quand une valeur de x rend la fonction donnée infinie, ou quand une des limites est infinie.

274. On peut encore reconnaître si une intégrale est finie, lorsque sa dérivée devient infinie pour une valeur particulière de x, en la comparant à une autre plus simple, pour laquelle il n'y ait pas d'incertitude, et telle que les deux dérivées aient un rapport fini pour cette valeur particulière : les deux intégrales seront en même

temps finies ou infinies. Par exemple $\int_0^x \frac{dx}{(e^x+x^n)x^m}$ et $\int_0^x \frac{dx}{x^m}$ seront dans ce cas. Le rapport des dérivées, e^x+x^n, devient 1 pour $x=0$: or la seconde est finie si $m<1$, et infinie si $m=1$, ou $m>1$; il en est donc de même de la première.

275. *Application des principes précédents à la recherche d'intégrales définies.* — En partant d'intégrales définies connues, et les différentiant ou intégrant par rapport à une constante, on obtient la valeur de nouvelles intégrales.

Ainsi

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a} = \frac{\pi}{2} a^{-\frac{1}{2}};$$

différentiant n fois par rapport à a, on obtient

$$\int_0^\infty \frac{1.2.3\ldots n}{(x^2+a)^{n+1}}\,dx = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n a^{n+\frac{1}{2}}}\frac{\pi}{2},$$

d'où

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\cdot\frac{\pi}{2a^{n+\frac{1}{2}}}.$$

276. Si l'on considère cette autre intégrale,

$$\int_0^\infty e^{-ax}dx = \frac{1}{a},$$

et qu'on différentie $n-1$ fois par rapport à a, on obtient

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-ax}dx = \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{a^n}.$$

Si l'on désigne, en général, par $\Gamma(p)$ l'intégrale

$$\int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx,$$

quelque valeur positive qu'ait p, on aura, pour toute valeur entière et positive de cette constante,

$$\Gamma(p) = 1.2.3\ldots(p-1),$$

et, pour toute valeur positive de p,

$$\int_0^\infty x^{p-1} e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(p)}{a^p}.$$

Si l'on différentie l'intégrale indéfinie $\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$, on obtient cette intégrale indéfinie,

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{d^n.\frac{e^{ax}}{a}}{da^n} + C'.$$

277. Si l'on part de l'intégrale $\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$ et qu'on intègre ses deux membres par rapport à m entre deux valeurs μ et ν, on obtient

$$\int_0^1 \frac{x^\mu - x^\nu}{1x} dx = 1\frac{\mu+1}{\nu+1},$$

et l'on ne saurait donner l'expression de l'intégrale indéfinie.

278. Si l'on intègre par rapport à a, entre deux limites quelconques b et c, les deux membres de l'équation

$$\int_0^\infty e^{-ax} dx = \frac{1}{a},$$

on obtient

$$\int_0^\infty \frac{e^{-bx}-e^{-cx}}{x} = 1\frac{c}{b}.$$

Si l'on part de

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos\alpha x dx = \frac{a}{a^2+\alpha^2},$$

on obtient de même

$$\int_0^\infty \frac{e^{-bx}-e^{-cx}}{x}\cos\alpha x dx = \frac{1}{2}\,1\,\frac{c^2+\alpha^2}{b^2+\alpha^2}.$$

279. De même l'équation

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin\alpha x dx = \frac{\alpha}{a^2+\alpha^2}$$

donne

$$\int_0^\infty \frac{e^{-bx}-e^{-cx}}{x}\sin\alpha x dx = \text{arc tang}\frac{c}{\alpha} - \text{arc tang}\frac{b}{\alpha}.$$

Si, dans cette dernière formule, on fait $b=0$, $c=\infty$, on obtient la suivante, qui est souvent utile :

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x dx}{x} = \frac{\pi}{2}, \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}dx = \pi.$$

Autres procédés pour la détermination d'intégrales définies.

280. On ramène quelquefois une intégrale définie simple à une intégrale définie double, parce que l'indépendance des deux variables peut conduire à des simplifications. Soit par exemple $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$. Elle est identique

avec $\int_0^\infty e^{-y^2}dy$. Si on les multiplie, on aura le carré de l'expression cherchée. Or on peut considérer le produit $\int_0^\infty e^{-x^2}dx \int_0^\infty e^{-y^2}dy$, comme obtenu en multipliant chaque élément $e^{-x^2}dx$ de la première par la seconde; et, dans cette dernière, on peut poser $y = xt$, x restant constamment le même que dans l'élément $e^{-x^2}dx$. Rien ne sera changé par là, quoique x s'introduise dans la seconde intégrale qui devient $\int_0^\infty xe^{-x^2t^2}dt$. Si l'on pouvait former cette dernière expression en x, en la multipliant par $e^{-x^2}dx$, on aurait un élément qui, intégré entre o et ∞, donnerait identiquement le produit des deux intégrales. Mais dans cette intégration, par rapport à t, le facteur constant $e^{-x^2}dx$ peut être introduit sous le signe $\int$, et l'on voit qu'on aura à intégrer l'expression

$$e^{-x^2}xe^{-x^2t^2}dxdt, \quad \text{ou} \quad xe^{-x^2(1+t^2)}dxdt,$$

d'abord par rapport à t, puis par rapport à x, ces deux variables étant indépendantes.

Or on sait que ces deux intégrations peuvent se faire dans un ordre inverse, sans que le résultat soit changé; et, de cette manière, l'opération pourra s'effectuer.

En effet,

$$\int_0^\infty xe^{-x^2(1+t^2)}dx = \frac{1}{2(1+t^2)}, \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \frac{dt}{2(1+t^2)} = \frac{\pi}{4}.$$

Donc

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi};$$

d'où, changeant x en mx,

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-m^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{m}.$$

281. Cette intégrale importante peut encore s'obtenir par le procédé suivant qui se trouve dans la *Mécanique* de Poisson.

Le produit déjà considéré $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2}\,dy\,dx$ représente le quart du volume du solide compris entre le plan XY et la surface dont l'équation est $z=e^{-x^2-y^2}$, et qui est engendrée par la révolution de la courbe dont l'équation est $z=e^{-x^2}$, autour de l'axe des z. Or, si l'on décompose ce volume au moyen de surfaces cylindriques infiniment voisines, et de révolution autour de l'axe des z, l'expression du volume compris entre les deux surfaces dont les rayons sont x, et $x+dx$, sera $2\pi x e^{-x^2}dx$; son intégrale est $-\pi e^{-x^2}$, et l'on aura le volume entier du solide, en la prenant entre les limites o et ∞, ce qui donne π. Si l'on en prend le quart, puis la racine carrée, on aura

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

et, par suite,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}.$$

282. Le passage des quantités réelles aux quantités imaginaires, fait avec la rigueur convenable, peut encore conduire à la détermination de nouvelles intégrales. En effet, on tire de la formule précédente, en changeant x en $x+\alpha$,

$$\sqrt{\pi}=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+\alpha)^2}dx=e^{-\alpha^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-2\alpha x}\,dx$$
$$=e^{-\alpha^2}\int_0^\infty e^{-x^2}(e^{2\alpha x}+e^{-2\alpha x})dx;$$

d'où

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\left(e^{2\alpha x}+e^{-2\alpha x}\right)dx=e^{\alpha^2}\sqrt{\pi}.$$

Posons $\alpha = a\sqrt{-1}$; il vient, en observant que $e^{2ax\sqrt{-1}} + e^{2ax\sqrt{-1}} = 2\cos 2ax$,

$$e^{-a^2}\sqrt{\pi} = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2ax dx,$$

d'où

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2ax dx = \frac{e^{-a^2}\sqrt{\pi}}{2},$$

ou, en changeant x en mx et am en n,

$$\int_0^\infty e^{-m^2x^2}\cos 2nx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2m}e^{-\frac{n^2}{m^2}}.$$

La substitution de $a\sqrt{-1}$ à α n'a pas altéré l'équation, parce que les deux membres pouvaient être développés en séries convergentes par rapport à α, et que, par conséquent, les coefficients des mêmes puissances de α étaient nécessairement les mêmes de part et d'autre. Or, comme ils ne changent pas, quelque expression que l'on substitue à α, l'identité a toujours lieu; et c'est pour cela qu'en lui subsituant $a\sqrt{-1}$, elle existe encore.

283. En partant des valeurs de deux intégrales définies que nous avons données précédemment, on peut parvenir à l'expression donnée par Wallis, du rapport de la circonférence au diamètre.

Ces deux formules sont

$$\int_0^1 \frac{x^{2k+1}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2.4.6\ldots 2k}{3.5.7\ldots(2k+1)},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{2k}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots 2k}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Lorsque k croît indéfiniment, elles tendent toutes les deux vers zéro, comme on peut s'en assurer en renversant les fractions, qui deviennent évidemment infinies avec k;

car la première devient ainsi

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2k}\right),$$

et ce produit surpasse $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2k}$, qui croît indéfiniment avec k. Il en serait de même pour la seconde. Mais le rapport de ces intégrales a pour limite l'unité.

En effet, si l'on considère deux valeurs consécutives de k, les valeurs correspondantes de l'une quelconque des deux intégrales ont un rapport qui tend indéfiniment vers l'unité, à mesure que k augmente. Or, si l'on prend l'exposant de x dans l'autre intégrale, compris entre les deux valeurs de l'exposant de la première, il est clair que la valeur de la seconde intégrale sera comprise entre les deux consécutives de la première, et que son rapport avec chacune d'elles tendra vers l'unité, comme le rapport qu'elles ont l'une avec l'autre.

On peut encore s'en assurer par la considération suivante, dont on trouve de fréquentes applications.

Lorsque k est très-grand, le numérateur est sensiblement nul, tant que x n'est pas très-voisin de l'unité; le dénominateur restant alors fini, la partie de l'intégrale prise depuis zéro jusqu'à une valeur $1-\alpha$, α étant une quantité fixe aussi petite que l'on voudra, est très-petite par rapport au reste de l'intégrale; et le rapport de ces deux parties tend vers zéro en même temps que k augmente, α restant constant (*). Pour comparer les deux

(*) On a, en effet,

$$\int_0^{1-\alpha}\frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{(1-\alpha)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}},$$

$$\int_{1-\alpha}^{1}\frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-(1-\alpha)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}},$$

μ étant compris entre 0 et $1-\alpha$, et γ entre $1-\alpha$ et 1; d'où il ré-

intégrales en question, lorsque k augmente indéfiniment, il suffit donc de prendre le rapport des parties de ces intégrales relatives aux limites $1-\alpha$ et 1, puis de supposer que α diminue de plus en plus. Or le rapport des différentielles est x, et, par conséquent, le rapport des parties que nous considérons des intégrales est une moyenne entre les valeurs extrêmes de x, qui sont $1-\alpha$ et 1. Ce rapport a donc pour limite 1; et il en est de même du rapport des intégrales entières, puisqu'on n'en a négligé qu'une partie infiniment petite par rapport à elles-mêmes.

On a donc

$$\lim \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3.3.5.5\ldots(2k-1)(2k-1)(2k+1)}{2.2.4\;4.6.6\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2k.2k} = 1,$$

d'où

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2.4.4.6.6.8.8\ldots}{3.3.5.5.7.7.9\ldots}.$$

Il est facile de voir que l'on aura un résultat trop faible ou trop fort, suivant que l'on prendra un nombre impair ou un nombre pair de facteurs aux deux termes de cette fraction.

Nous parlerons plus tard d'une méthode générale, qui consiste à ramener la détermination des intégrales définies à l'intégration d'équations différentielles relatives aux constantes qui se trouvent sous le signe de l'intégration.

---

sulte

$$\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} > \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}}.$$

Le rapport de la seconde intégrale à la première est donc plus grand que

$$\frac{1}{(1-\alpha)^{n+1}} - 1.$$

Il croît donc infiniment avec n, quelque petit que soit α.

Intégration des différentielles qui renferment plusieurs variables indépendantes.

284. Nous n'avons considéré jusqu'ici que les différentielles qui ne renferment qu'une seule variable et qui sont, par conséquent, de la forme $F(x)dx$; nous allons examiner maintenant celles qui renferment plusieurs variables indépendantes, et nous proposer de déterminer, s'il est possible, la fonction de ces variables qui a pour différentielle totale l'expression donnée.

Considérons d'abord deux variables x, y, et soit proposé d'intégrer l'expression

$$Mdx + Ndy,$$

dans laquelle on a

$$M = \varphi(x, y), \quad N = \psi(x, y).$$

On observera d'abord qu'il n'existe pas toujours une fonction de x et y dont elle soit la différentielle : car, si l'on désigne par u une pareille fonction, on devra avoir $M = \frac{du}{dx}$, $N = \frac{du}{dy}$; et comme $\frac{d^2u}{dxdy} = \frac{d^2u}{dydx}$, il faudra qu'on ait $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$. Si donc les fonctions M, N ne satisfont pas à cette identité, il n'existera aucune fonction de x et y qui ait pour différentielle l'expression donnée. Mais nous allons voir que, si cette condition est remplie, la fonction cherchée existe nécessairement, et que sa détermination se ramène toujours à des quadratures.

On remarquera d'abord que cette fonction, devant avoir M pour dérivée partielle par rapport à x, doit être renfermée dans l'intégrale indéfinie de Mdx par rapport à x, y étant considérée comme une constante. Elle est donc

comprise dans l'expression $\int_{x_0}^{x} M dx + V$, V étant une fonction arbitraire de y.

Il reste à déterminer cette fonction de manière que la dérivée partielle par rapport à y soit N. Or cette dérivée est

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dM}{dy} dx + \frac{dV}{dy}, \quad \text{ou} \quad \int_{x_0}^{x} \frac{dN}{dx} dx + \frac{dV}{dy},$$

ou enfin

$$\psi(x, y) - \psi(x_0, y) + \frac{dV}{dy}.$$

Il est donc nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\frac{dV}{dy} - \psi(x_0, y) = 0, \quad \text{ou} \quad V = \int_{y_0}^{y} \psi(x_0, y)\, dy + C.$$

Il existe donc nécessairement une fonction de x et y, dont l'expression donnée est la différentielle; et la valeur la plus générale de cette fonction u est

$$u = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y)\, dx + \int_{y_0}^{y} \psi(x_0, y)\, dy + C,$$

C étant une constante arbitraire.

285. Il n'y a pas plus de difficulté dans le cas où le nombre des variables indépendantes est plus grand. Soit, par exemple,

$$M dx + N dy + P dz$$

et

$$M = \varphi(x, y, z), \quad N = \psi(x, y, z), \quad P = \chi(x, y, z).$$

Il faudra d'abord que M, N, P satisfassent aux conditions indispensables

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}, \quad \frac{dM}{dz} = \frac{dP}{dx}, \quad \frac{dN}{dz} = \frac{dP}{dy}.$$

Cela étant, la fonction cherchée sera nécessairement comprise dans la formule $\int_{x_0}^{x} M dx + V$, V étant une fonction arbitraire de y et z, qu'il faut déterminer par la condition, que les dérivées partielles de l'expression précédente, par rapport à y et z, soient respectivement N et P.

On aura donc

$$N = \int_{x_0}^{x} \frac{dM}{dy} dx + \frac{dV}{dy} = \int_{x_0}^{x} \frac{dN}{dx} dx + \frac{dV}{dy} = N - \psi(x_0, y, z) + \frac{dV}{dy},$$

$$P = \int_{x_0}^{x} \frac{dM}{dz} dx + \frac{dV}{dz} = \int_{x_0}^{x} \frac{dP}{dx} dx + \frac{dV}{dz} = P - \chi(x_0, y, z) + \frac{dV}{dz}.$$

Il est donc nécessaire et suffisant que la fonction V satisfasse aux deux conditions

$$\frac{dV}{dy} = \psi(x_0, y, z), \quad \frac{dV}{dz} = \chi(x_0, y, z),$$

ce qui rentre dans la question précédente. On aura donc

$$V = \int_{y_0}^{y} \psi(x_0, y, z)\, dy + \int_{z_0}^{z} \chi(x_0, y_0, z)\, dz + C.$$

La fonction dont la différentielle est l'expression donnée, existe donc lorsque les trois conditions ci-dessus ont lieu; et, si on la désigne par u, on aura

$$u = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y, z)\, dz + \int_{y_0}^{y} \psi(x_0, y, z)\, dy + \int_{z_0}^{z} \chi(x_0, y_0, z)\, dz + C,$$

C étant une constante arbitraire.

Il est facile de voir que le cas de m variables se ramène de la même manière au cas de $m - 1$, pourvu que les coefficients satisfassent aux conditions qui expriment que les coefficients différentiels du second ordre de la fonction cherchée, pris de toutes les manières possibles

par rapport à deux variables différentes, sont indépendants de l'ordre des différentiations. Donc le problème est toujours possible lorsque ces conditions sont remplies, et il est toujours ramené à de simples quadratures.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU CALCUL INTÉGRAL.

286. Les méthodes exposées jusqu'ici ont pour objet de faire connaître une fonction, quand on a l'expression de sa différentielle ou de sa dérivée. On aura donc ramené immédiatement à ces méthodes la résolution de toute question où il s'agira de déterminer une fonction d'une seule variable, lorsque l'on aura pu parvenir à connaître l'expression générale de sa différentielle. Or cette expression est beaucoup plus facile à déterminer que celle de la fonction elle-même; car, en vertu du principe fondamental que nous avons démontré dans le Calcul différentiel, on peut négliger toute quantité infiniment petite par rapport à la différentielle que l'on veut calculer, et il n'en résulte aucune erreur soit dans la dérivée qui est la limite d'un rapport, soit dans l'intégrale qui peut être considérée comme la limite d'une somme d'infiniment petits. Par ce moyen, on peut se débarrasser de la partie des accroissements des fonctions qui rend leur expression aussi difficile à former que celle des fonctions même; et il suffit toujours de s'assurer que la partie qu'on néglige est infiniment petite par rapport à la différentielle, ou à l'accroissement lui-même. Dans ce peu de mots se trouve renfermée toute la métaphysique du calcul infinitésimal. Elle est, comme on le voit, bien simple et bien élémentaire, et toutes les théories que nous allons exposer offriront la reproduction constante de cette idée générale.

Quadrature des surfaces planes.

287. L'aire comprise entre les deux ordonnées MP, NQ (*fig.* 17), l'arc de courbe MN et l'axe des x est une fonction de l'abscisse extrême $AQ = x$ dont l'accroissement relatif à l'accroissement QS de x est la figure NRSQ.

L'aire de cette figure serait aussi difficile à calculer que MNQP, puisque la difficulté provient de la partie curviligne du périmètre.

Mais, si l'on mène par le point N une parallèle NK à l'axe des x, la partie NRK de la figure pourra être supprimée comme étant infiniment petite par rapport à NRSQ. En effet, si l'on mène RN' parallèle à QS, NN'RK sera plus grand que NRK, et son rapport avec N'KSQ, qui est plus petit que NRSQ, tend vers zéro à mesure que QS diminue, puisque ce rapport est le même que celui de NN' à NQ. Par ce moyen, on a donc débarrassé l'accroissement de l'aire, de la partie qui en rendait le calcul difficile; et la limite de son rapport à l'accroissement de l'abscisse n'est nullement altérée. Le calcul de cette limite, ou de la dérivée de l'aire, est donc devenu plus simple, sans rien perdre de sa rigueur.

Si les axes des coordonnées sont rectangulaires, la figure NKSQ est égale à $NQ \times QS$, et la limite de son rapport avec QS est NQ ou y. La dérivée de l'aire est donc y, et sa différentielle ydx.

Si les axes font entre eux un angle θ, l'expression de la différentielle sera $y \sin\theta dx$.

L'aire comprise entre les deux ordonnées relatives aux abscisses x_0 et x peut donc être représentée, dans le premier cas, par $\int_{x_0}^{x} ydx$, et, dans le second, par $\sin\theta \int_{x_0}^{x} ydx$.

L'équation de la courbe donne y en fonction de x, et la quadrature de la surface en question est ramenée à une intégration. C'est pour cela que l'on désigne souvent par le mot *quadrature* l'opération du calcul intégral par laquelle on remonte de la différentielle d'une fonction à une seule variable, à cette fonction même.

Si l'aire à calculer était comprise entre deux ordonnées et deux arcs de courbe, l'expression de sa différentielle serait $(Y - y)\,dx$, en désignant par Y et y les fonctions de x qui représentent l'ordonnée de chacune des deux courbes. Si la nature de l'une ou de l'autre de ces courbes changeait dans l'intervalle compris entre les limites, il faudrait partager cet intervalle en plusieurs autres, dont les limites seraient les diverses valeurs de x où s'opéraient ces changements.

Si la courbe est donnée par une équation entre des coordonnées polaires θ et r, l'aire que l'on cherche à évaluer est celle de la figure comprise entre deux rayons vecteurs et l'arc de la courbe. Sa différentielle est, comme nous l'avons déjà vu, $r^2\frac{d\theta}{2}$. Donc l'aire comprise entre les deux rayons correspondants aux angles θ_0, θ aura pour expression $\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta} r^2 d\theta$, r désignant la fonction de θ tirée de l'équation de la courbe.

Si la surface à évaluer était comprise entre deux rayons vecteurs et deux courbes, sa différentielle serait $\frac{(r^2 - r'^2)}{2}d\theta$, r et r' désignant les rayons vecteurs des deux courbes, relatifs à une même valeur de θ; l'aire cherchée serait donc exprimée par $\frac{1}{2}\int_{\theta_0}(r^2 - r'^2)\,d\theta$, r et r' étant des fonctions connues de θ, déduites des équations des deux courbes.

288. *Paraboles.* — Proposons-nous d'abord de calculer l'aire des paraboles renfermées dans l'équation générale

$$y^m = px^n,$$

m et n étant positifs ; on aura

$$\int y\,dx = p^{\frac{1}{m}} \int x^{\frac{n}{m}}\,dx = p^{\frac{1}{m}} \frac{x^{\frac{n}{m}+1}}{\frac{n}{m}+1} + C.$$

Si l'on prend l'aire à partir de $x = 0$, on aura $C = 0$, et l'aire terminée à l'ordonnée relative à une valeur quelconque de x aura pour expression

$$\frac{mp^{\frac{1}{m}}x^{\frac{n}{m}+1}}{m+n}, \quad \text{ou} \quad \frac{mxy}{m+n}.$$

La partie du rectangle xy qui reste, après avoir retranché celle-ci, est $\frac{nxy}{m+n}$; donc l'arc de la courbe divise le rectangle xy dans le rapport constant de $m : n$.

Réciproquement, la courbe qui jouirait de cette propriété ne saurait avoir une équation d'une autre forme que la proposée. En effet, si l'on désigne par y l'ordonnée inconnue de cette courbe, on devra avoir

$$\int y\,dx : xy - \int y\,dx :: m : n, \quad \text{d'où} \quad (m+n)\int y\,dx = mxy;$$

et, en différentiant,

$$ny\,dx = mx\,dy, \quad \text{d'où} \quad \frac{m\,dy}{y} = \frac{n\,dx}{x};$$

par suite,

$$m\,l\,y = n\,l\,x + l\,C,$$

en désignant par $l\,C$ une constante arbitraire. Cette dernière équation donne $y^m = Cx^n$; en donnant toutes les

valeurs possibles à la constante C, on aura toutes les courbes qui jouissent de la propriété demandée.

289. *Hyperboles.* — Considérons maintenant l'équation générale $y^m x^n = a$ des hyperboles qui ont pour asymptotes les axes des coordonnées; on aura

$$\int y\,dx = a^{\frac{1}{m}} \int x^{-\frac{n}{m}} dx = \frac{a^{\frac{1}{m}} x^{-\frac{n}{m}+1}}{-\frac{n}{m}+1} + C.$$

Soit d'abord $n < m$, et supposons que l'aire commence à l'axe des y; on aura $C = 0$, et l'aire aura pour expression

$$\frac{m a^{\frac{1}{m}} x^{-\frac{n}{m}+1}}{m-n}, \quad \text{ou} \quad \frac{mxy}{m-n}.$$

On voit que sa valeur est finie, quoiqu'elle s'étende indéfiniment dans le sens des y, puisque l'axe des y est asymptote de la courbe. Cette valeur est plus grande que le rectangle xy; si l'on retranche ce rectangle, il reste $\frac{nxy}{m-n}$, et les deux aires sont encore dans le rapport constant de $m : n$.

Réciproquement, en partant de cette propriété, on retrouvera une équation de même forme que la proposée. En effet, on aura

$$\int y dx : \int y dx - xy :: m : n, \quad \text{d'où} \quad (m-n)\int y dx = mxy,$$

et, par suite,

$$-\,ny dx = mx dy;$$

donc

$$\frac{m dy}{y} = -\frac{n dx}{x}, \quad m\,l\,y = -n\,l\,x + l.\,C,$$

C étant une constante arbitraire. On en déduit immédia-

tement $y^m = Cx^{-n}$ ou $y^m x^n = C$, équation de même forme que la proposée.

L'aire $\dfrac{ma^{\frac{1}{m}} x^{-\frac{n}{m}+1}}{m-n}$ devient infinie avec x.

Ainsi l'aire comptée à partir d'une ordonnée arbitraire, et prolongée indéfiniment vers l'une des deux asymptotes, est finie ou infinie, suivant que la coordonnée comptée sur cette asymptote a le plus grand ou le plus petit exposant dans l'équation.

Si l'on avait $n > m$, on arriverait à la même conclusion. Si l'on avait $m = n$, l'équation serait de la forme $xy = p^2$, et représenterait une hyperbole équilatère, puisque les axes sont rectangulaires. On aurait alors

$$\int y\,dx = p^2 \int \frac{dx}{x} = p^2\, \mathrm{l}\, x + C.$$

Si l'on voulait que l'aire commençât à l'axe des y, la constante C serait infinie; ce qui fait voir que l'aire comprise entre une ordonnée quelconque et l'axe des y est infinie.

Si on la fait commencer à l'abscisse x_0, on aura

$$C = -p^2\, \mathrm{l}\, x_0,$$

et l'aire aura pour expression

$$p^2\, \mathrm{l}\, \frac{x}{x_0}.$$

Si l'on suppose $x_0 = p$, l'aire commencera à l'ordonnée menée par le sommet de l'hyperbole; et, si l'on prend p pour unité, son expression sera $\mathrm{l}\, x$. C'est cette propriété qui a fait donner aux logarithmes népériens le nom de *logarithmes hyperboliques*.

290. *Ellipse.* — Soit l'équation de l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \quad \text{ou} \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2};$$

on aura

$$\int y\,dx = \frac{b}{a}\int dx\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Or, en intégrant par parties, on trouve

$$\int dx\sqrt{a^2 - x^2} = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Mais

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{(x^2 - a^2 + a^2)\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\int dx\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a};$$

en substituant, il vient

$$\int dx\sqrt{a^2 - x^2} = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} - \int dx\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Réunissant les deux intégrales, que l'on supposera prises à partir de la même limite, et ajoutant une constante arbitraire, il vient, en divisant par 2, puis multipliant par $\frac{b}{a}$,

$$\frac{b}{a}\int dx\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{bx\sqrt{a^2 - x^2}}{2a} + \frac{ab}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Si l'on veut que l'aire commence à l'axe des y, on aura $C = 0$. Si l'on fait ensuite $x = a$, on aura $\frac{\pi ab}{4}$ pour la valeur du quart de l'ellipse. L'aire de l'ellipse entière est donc πab; elle devient πa^2, si $b = a$.

Le terme $\frac{bx\sqrt{a^2 - x^2}}{2a}$ étant équivalent à $\frac{xy}{2}$, mesure le triangle dont les côtés sont x et y; par conséquent, le

terme $\frac{ab}{2}$ arc sin $\frac{x}{a}$ mesure le reste de l'aire, c'est-à-dire le secteur formé par l'axe des y, l'arc de l'ellipse et le rayon mené du centre à l'extrémité de cet arc.

291. *Hyperbole.* — Soit maintenant l'équation de l'hyperbole

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2, \quad \text{ou} \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2};$$

on aura

$$\int y dx = \frac{b}{a}\int dx\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Et, si l'on suit la même marche que pour l'ellipse, on trouvera

$$\int y dx = \frac{bx\sqrt{x^2 - a^2}}{2a} - \frac{ab}{2}\mathrm{l}(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + \mathrm{C};$$

si l'on veut faire commencer l'aire au sommet, son expression devra être nulle pour $x = a$, d'où $\mathrm{C} = \frac{ab}{2}\mathrm{l}a$, et l'aire aura pour valeur

$$\frac{bx\sqrt{x^2 - a^2}}{2a} + \frac{ab}{2}\mathrm{l}\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}.$$

Le premier terme étant égal à $\frac{xy}{2}$, on en conclut que $\frac{ab}{2}\mathrm{l}\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}$ est l'expression du secteur compris entre l'axe transverse, l'arc de l'hyperbole et le rayon mené du centre à l'extrémité de cet arc.

292. *Cycloïde.* — Considérons maintenant la cycloïde rapportée à son sommet A (*fig.* 18); son équation différentielle sera

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{2a - y}},$$

$2a$ étant le diamètre AB du cercle générateur. L'aire AMP a pour expression

$$\int_0^x y\,dx, \quad \text{ou} \quad \int_0^y dy\sqrt{2ay - y^2};$$

elle est donc identique avec l'aire AQN relativement au cercle générateur.

L'aire totale ADK est donc égale à la moitié de celle du cercle, ainsi que l'aire symétrique CHA; et, comme le rectangle CHKDC est égal à $4\pi a^2$, l'aire CADC sera égale à $3\pi a^2$, ou au triple du cercle générateur.

Quant à l'expression de l'intégrale

$$\int dy\sqrt{2ay - y^2},$$

on observera qu'elle est identique avec

$$\int dy\sqrt{a^2 - (y-a)^2};$$

elle rentre donc dans celle que nous avons calculée dans le cas de l'ellipse, en y changeant x en $y - a$. Ainsi l'on aura

$$\int dy\sqrt{2ay - y^2} = \frac{(y-a)\sqrt{2ay - y^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{y-a}{a} + C.$$

Si l'on prend l'intégrale à partir de $y = 0$, on aura

$$C = \frac{\pi a^2}{4};$$

et, si l'on prend pour seconde limite $y = 2a$, la valeur de l'aire sera

$$\frac{\pi a^2}{2},$$

comme nous l'avions déjà reconnu.

293. *Spirale logarithmique.* — L'équation de cette courbe est, en coordonnées polaires, $r = Ae^{a\theta}$; l'aire comprise entre deux rayons vecteurs correspondants aux angles θ_0 et θ aura donc pour expression

$$\frac{A^2}{2}\int_{\theta_0}^{\theta} e^{2a\theta}\,d\theta, \quad \text{ou} \quad \frac{A^2}{4a}\left(e^{2a\theta} - e^{2a\theta_0}\right),$$

ou

$$\frac{r^2 - r_0^2}{4a},$$

en désignant par r_0 et r les valeurs extrêmes du rayon vecteur.

Si l'on part de $r_0 = 0$, c'est-à-dire si l'on cherche la limite de l'aire comprise entre le rayon fixe r et un autre rayon dont l'extrémité tend vers le pôle, tandis que sa direction tourne indéfiniment autour de ce point asymptote, on trouvera simplement $\frac{r^2}{4a}$. Cette aire croît donc comme le carré du rayon vecteur.

Rectification des courbes.

294. Nous avons démontré, dans le Calcul différentiel, que la différentielle d'un arc de courbe plane ou à double courbure est, dans le premier cas, $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, et, dans le second, $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, en supposant les axes rectangulaires. Lorsque les axes font entre eux des angles quelconques, on sait quels termes il faut ajouter sous le radical; mais on suppose ordinairement ces angles droits. L'arc dont les extrémités correspondent aux abscisses x_0 et x aura donc pour expression, dans le premier cas,

$$\int_{x_0}^{x} \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

et, dans le second,

$$\int_{x_0}^{x} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Si la courbe plane était rapportée à des coordonnées polaires, nous avons vu que la différentielle de sa longueur aurait pour expression

$$\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2},$$

et sa longueur serait, par conséquent, exprimée par

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2},$$

θ_0 et θ étant des valeurs extrêmes de l'angle θ.

295. *Parabole.* — Soit d'abord la parabole ayant pour équation

$$y^2 = 2px, \quad \text{d'où} \quad y\,dy = p\,dx, \quad dx = \frac{y\,dy}{p},$$

on aura

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = dy\sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}}.$$

La longueur de l'arc dont les extrémités correspondent à y_0 et y aura donc pour expression

$$\frac{1}{p}\int_{y_0}^{y} dy\sqrt{y^2+p^2} = \frac{1}{2p}\left[y\sqrt{y^2+p^2} + p^2 \mathrm{l}\left(y + \sqrt{y^2+p^2}\right) + \mathrm{C}\right].$$

Si l'on veut faire commencer l'arc au sommet, on aura

$$\mathrm{C} = -p^2 \mathrm{l}\, p,$$

et l'expression de cet arc sera

$$\frac{y\sqrt{y^2+p^2}}{2p} + \frac{p}{2}\,\mathrm{l}\,\frac{\left(y + \sqrt{y^2+p^2}\right)}{p}.$$

296. *Ellipse.* — L'équation de l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

donne

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y},$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}},$$

en désignant $\sqrt{a^2 - b^2}$ par ae.

L'abscisse x étant toujours moindre que a, on peut poser

$$x = a \sin\varphi,$$

d'où

$$dx = a \cos\varphi d\varphi, \quad ds = a d\varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}.$$

Pour intégrer cette expression, on développera le radical en série, ce qui est permis, puisque le second terme est plus petit que le premier. On aura ainsi

$$(1 - e^2 \sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2\varphi - \frac{1.1}{2.4} e^4 \sin^4\varphi - \ldots - \frac{1.1.3\ldots(2m-3)}{2.4.6\ldots 2m} e^{2m} \sin^{2m}\varphi - \ldots,$$

et, par suite,

$$s = a\left[\varphi - \frac{1}{2} e^2 \int \sin^2\varphi d\varphi - \frac{1.1}{2.4} e^4 \int \sin^4\varphi d\varphi - \ldots - \frac{1.1.3\ldots(2m-3)}{2.4.6\ldots 2m} e^{2m} \int \sin^{2m}\varphi d\varphi - \ldots\right].$$

Cette série sera d'autant plus convergente que l'excentricité e sera plus petite. Si l'on intègre à partir de $\varphi = 0$, on aura

$$\int \sin^{2m}\varphi d\varphi = -\frac{\cos\varphi}{2m}\left[\sin^{2m-1}\varphi + \frac{2m-1}{2m}\sin^{2m-3}\varphi + \ldots + \frac{(2m-1)(2m-3)\ldots 3}{(2m-2)(2m-4)\ldots 2}\sin\varphi\right] + \frac{(2m-1)\ldots 3.1}{2m\ldots 4.2}\varphi;$$

et, si l'on prend pour seconde limite $\varphi = \frac{\pi}{2}$, on aura pour l'expression du quart du périmètre de l'ellipse,

$$\frac{\pi a}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}e\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}e^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}e^3\right)^2 - \ldots - \frac{1}{2m-1}\left(\frac{1.3\ldots(2m-1)}{2.4\ldots 2m}e^m\right)^2 - \ldots\right].$$

Si $e = 0$, l'ellipse devient le cercle dont le rayon est a,

et l'expression précédente se réduit à $\frac{\pi a}{2}$, qui est, en effet, le quart de la circonférence.

297. *Hyperbole.* — L'équation de l'hyperbole

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2,$$

donne

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2 x}{a^2 y}, \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{\frac{e^2 x^2 - a^2}{x^2 - a^2}},$$

en posant

$$\sqrt{a^2 + b^2} = ae.$$

Les valeurs de x étant toujours plus grandes que a, on posera $x = \frac{a}{\cos\varphi}$, et l'on aura

$$ds = ae \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\sqrt{1 - \frac{\cos^2\varphi}{e^2}}.$$

Si l'on développe en série le radical, et qu'on intègre à partir de $\varphi = 0$ qui correspond à $x = a$, on aura

$$s = ae\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{\cos^2\varphi}{e^2} - \frac{1.1}{2.4}\frac{\cos^4\varphi}{e^4} - \ldots - \frac{1.1.3\ldots(2m-3)}{2.4.6\ldots 2m}\frac{\cos^{2m}\varphi}{e^{2m}} - \ldots\right],$$

d'où

$$s = ae\,\mathrm{tang}\,\varphi - \frac{a\varphi}{2e} - \frac{a}{e}\int_0^\varphi d\varphi\left[\frac{1.1}{2.4}\frac{\cos^2\varphi}{e^2} + \frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{\cos^4\varphi}{e^4} + \ldots + \frac{1.1.3\ldots(2m-3)}{2.4.6\ldots 2m}\frac{\cos^{2m-2}\varphi}{e^{2m-2}} + \ldots\right].$$

Lorsque x croît indéfiniment, φ tend vers $\frac{\pi}{2}$, et s croît sans limite. Mais, si l'on cherche la différence entre l'arc et la partie de l'asymptote comprise entre le centre et le point correspondant à l'abscisse de l'extrémité de l'arc, cette différence tend vers une limite dont il est facile d'obtenir l'expression. En effet, cette partie de l'asymp-

tote est égale à $\frac{ae}{\cos\varphi}$; et, si l'on en retranche s, il reste

$$\frac{ae(1-\sin\varphi)}{\cos\varphi}+\frac{a\varphi}{2e}+\frac{a}{e}\int_0^\varphi d\varphi\left[\frac{1}{2.4}\frac{1\cos^2\varphi}{e^2}+\frac{1}{2.4.6}\frac{1.3\cos^4\varphi}{e^4}+\ldots\right].$$

Si l'on passe à la limite $\varphi=\frac{\pi}{2}$, il vient

$$\frac{\pi a}{4e}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{e^2}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{e^3}\right)^2+\ldots\right].$$

298. *Cycloïde.* — L'équation de la cycloïde rapportée à son sommet est

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{y}{2a-y}},$$

d'où

$$ds=dy\sqrt{1+\frac{2a-y}{y}}=y^{-\frac{1}{2}}dy\sqrt{2a};$$

donc

$$s=2y^{\frac{1}{2}}\sqrt{2a}+C;$$

et si l'on fait commencer l'arc au sommet, on aura

$$C=0,\quad \text{et}\quad s=2\sqrt{2ay}.$$

Si l'on fait $y=2a$, on aura la moitié du périmètre de la cycloïde, qui sera égale à $4a$. Pour une valeur quelconque de y, s est double de la longueur de la tangente.

C'est à quoi l'on était déjà parvenu par la théorie des développées.

299. *Spirale logarithmique.* — L'équation polaire de cette courbe est

$$r=Ae^{a\theta},\quad \text{d'où}\quad dr=Aae^{a\theta}d\theta;$$

$$ds=\sqrt{dr^2+r^2d\theta^2}=Ad\theta\sqrt{e^{2a\theta}(1+a^2)}=A\sqrt{1+a^2}.e^{a\theta}\,d\theta.$$

Donc

$$s = \mathrm{A}\,\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}\,e^{a\theta} + \mathrm{C} = r\,\frac{\sqrt{1+a^2}}{a} + \mathrm{C}.$$

Si l'arc commence au pôle, qui est asymptote de la courbe, on aura

$$\mathrm{C} = 0 \quad \text{et} \quad s = r\,\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}.$$

Cette expression est celle de la longueur de la tangente menée à l'extrémité de l'arc, et terminée à la perpendiculaire au rayon vecteur mené par le pôle. Ce résultat avait déjà été obtenu par la théorie des développées.

300. Supposons maintenant les points déterminés par trois coordonnées polaires. Soient θ l'angle formé par le rayon vecteur r avec l'axe des z, et ψ l'angle formé par sa projection sur le plan XY avec l'axe des x. Toute courbe sera déterminée par deux équations entre r, ψ, θ. Les équations qui déterminent généralement x, y, z en fonction de r, θ, ψ, feront connaître dx, dy, dz, au moyen de r, θ, ψ, dr, $d\theta$, $d\psi$; et en les substituant dans $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, on aura l'expression de la différentielle de l'arc en coordonnées polaires. Mais on peut y arriver directement de la manière suivante :

Si l'on conçoit une sphère décrite du pôle comme centre avec le rayon r, elle coupe le rayon $r + dr$ en un point qui, joint à l'extrémité de r par un arc de grand cercle, détermine un triangle rectangle infiniment petit, dont ds est l'hypoténuse et dr un des côtés de l'angle droit. Pour déterminer le troisième côté, on mènera par l'axe des z deux plans contenant respectivement les deux rayons, et qui comprendront entre eux l'angle $d\psi$; puis, par l'une des extrémités de ce troisième côté, on mènera un plan parallèle à XY : le côté cherché sera l'hypoténuse d'un triangle rectangle tracé sur la sphère, et dont

les deux côtés de l'angle droit seront respectivement $r \sin \theta d\psi$ et $r d\theta$. On aura donc

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\psi^2};$$

et pour avoir s, il suffira d'exprimer deux des variables en fonction de la troisième d'après les équations de la courbe, et d'intégrer entre les limites demandées.

Cubature des solides de révolution.

301. Considérons maintenant le solide formé par la révolution d'une surface plane autour d'un axe situé dans son plan, et que nous prendrons pour axe des x. L'équation de la courbe qui termine cette surface est donnée entre deux coordonnées x, y, situées dans le plan YAX, où se trouve primitivement cette courbe. Cela posé, nous nous proposons d'évaluer le volume compris entre deux plans perpendiculaires à l'axe de rotation, et qui est engendré par la partie MNM'N' de la surface (*fig.* 19), comprise entre les deux ordonnées arbitraires MP, NQ. Pour cela, nous chercherons l'expression de la différentielle de ce volume, que l'on peut considérer comme l'accroissement infiniment petit que prend le volume V lorsque la variable x dont il est fonction prend l'accroissement dx. Soit QR $= dx$, dV sera considéré comme le volume engendré par la surface NKN'K'. Mais, si par les points N, N' on mène des parallèles à AX, on remplacera NKN'K' par un rectangle qui engendrera un volume, dont le rapport avec l'accroissement exact du volume aura pour limite l'unité; ce que l'on démontre comme pour les aires. Mais le volume qu'engendre ce rectangle a pour mesure $\pi(y^2 - y'^2)\,dx$, y et y' étant les ordonnées NQ, N'Q; donc le volume V, compris entre deux plans correspondants aux abscisses x_0, x, a pour expres-

sion

$$V = \pi \int_{x_0}^{x} (y^2 - y'^2)\, dx.$$

Si l'on veut avoir le volume total, il faudra prendre pour limites de cette intégrale la plus petite et la plus grande des valeurs des x auxquelles correspondent des points de la surface donnée.

302. *Ellipsoïde.* — Supposons que la surface génératrice soit celle d'une ellipse tournant autour d'un de ses axes, son équation sera

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2),$$

et l'on aura

$$V = \frac{\pi b^2}{a^2} \int (2ax - x^2)\, dx = \frac{\pi b^2}{a^2}\left(ax^2 - \frac{x^3}{3}\right) + C.$$

Si le volume doit commencer au sommet, on a

$$C = 0 \quad \text{et} \quad V = \frac{\pi b^2}{a^2}\left(ax^2 - \frac{x^3}{3}\right).$$

On aura le volume entier de l'ellipsoïde en faisant $x = 2a$, ce qui donne

$$V = \frac{4\pi b^2 a}{3};$$

il devient $\frac{4}{3}\pi a^3$ si $b = a$, ce qui réduit l'ellipsoïde à la sphère dont le rayon est a.

Il est à remarquer que la différentielle dV, ne renfermant pas de radicaux, ne devient pas imaginaire en dehors des limites 0 et $+2a$; elle ne fait que changer de signe, et est égale, au signe près, à celle du volume engendré par l'hyperbole, dont l'équation serait

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - 2ax).$$

Il résulte de là que, si dans l'expression de V on donne à la seconde limite x une valeur négative, on obtiendra le volume de l'hyperboloïde, depuis cette valeur de x jusqu'à $x = 0$; que, si l'on donne à x une valeur positive plus petite que $2a$, on aura le volume de l'ellipsoïde depuis $x = 0$ jusqu'à cette seconde limite; et qu'enfin, si l'on donne à x une valeur positive plus grande que $2a$, on obtiendra le volume entier de l'ellipsoïde, diminuée du volume de l'hyperboloïde compris entre $x = 2a$ et la seconde limite.

Donc, si l'on veut trouver la valeur qu'il convient de donner à x pour que V soit égal à un volume donné, ou que l'ellipsoïde soit partagé dans un rapport donné, on trouvera trois valeurs réelles : l'une négative, l'autre positive et plus petite que $2a$, et la troisième positive et plus grande que $2a$. Mais la seconde seule satisfait à la condition de partager l'ellipsoïde dans le rapport demandé, ou de manière à ce que V ait une valeur donnée, pourvu qu'elle soit moindre que $\frac{4}{3}\pi a^2 b$.

303. *Tore.* — Ce solide est engendré par la révolution d'un cercle autour d'une droite située dans son plan. Soit l'équation de ce cercle

$$(y - 6)^2 + (x - \alpha)^2 = R^2,$$

ou

$$y = 6 \pm \sqrt{R^2 - (x - \alpha)^2}.$$

La différentielle du volume est (*fig.* 20)

$$\pi\left(\overline{MP}^2 - \overline{M'P}^2\right) dx,$$

ou

$$4\pi 6 dx \sqrt{R^2 - (x - \alpha)^2},$$

ou encore

$$2\pi 6 . MM' dx.$$

Or $MM'dx$ est la différentielle de l'aire du cercle générateur. Donc le volume engendré par la partie du cercle comprise entre deux ordonnées quelconques est égal à cette aire multipliée par $2\pi6$, c'est-à-dire par la circonférence décrite par le centre du cercle.

Si l'on veut avoir le volume entier du solide, il faut multiplier l'aire du cercle par la circonférence décrite par son centre, ce qui donne $2\pi^2 6 R^2$.

On trouverait le même résultat en intégrant la différentielle $dx\sqrt{R^2-(x-\alpha)^2}$ que nous avons déjà trouvée dans la quadrature de l'ellipse et du cercle.

Quadrature des surfaces de révolution.

304. On appelle *aire d'une surface courbe* la limite de l'aire d'un polyèdre inscrit ou circonscrit à cette surface, et dont les faces infiniment petites ont pour limites de leurs directions les plans tangents aux différents points de cette surface.

Il résulte de là qu'on peut, au lieu des éléments plans qui composent la surface du polyèdre, considérer des surfaces courbes dont les plans tangents aient pour limites ceux de la surface proposée. On pourra donc considérer la surface engendrée par la révolution d'un arc de courbe plane, tournant autour d'un axe situé dans son plan, comme la limite de la somme des troncs de cônes infiniment petits, engendrés par les côtés d'un polygone inscrit dans cette courbe. Si l'on désigne par y et $y+dy$ les ordonnées des deux points extrêmes d'un quelconque de ces côtés ayant pour longueur ds, la surface du tronc de cône qu'il engendre aura pour mesure

$$2\pi\left(y+\frac{dy}{2}\right)ds, \quad \text{ou} \quad 2\pi y\,ds,$$

en négligeant l'infiniment petit du second ordre.

L'aire engendrée par l'arc dont les points extrêmes ont pour abscisses x_0 et x aura donc pour expression

$$2\pi\int_{x_0}^{x} y\,ds,\quad \text{ou}\quad 2\pi\int_{x_0}^{x} y\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

305. *Ellipsoïde.* — Supposons que l'ellipse dont l'équation est

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2,$$

tourne autour de l'axe des x, elle engendrera une surface dont la différentielle sera

$$\frac{2\pi b}{a^2}\,dx\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}.$$

Supposons d'abord $a>b$ et posons

$$a^2-b^2=a^2e^2;$$

l'aire, commençant à $x=0$, aura pour expression

$$\frac{2\pi be}{a}\int_0^x dx\sqrt{\frac{a^2}{e^2}-x^2}=\frac{\pi be}{a}\left[x\sqrt{\frac{a^2}{e^2}-x^2}+\frac{a^2}{e^2}\arcsin\frac{ex}{a}\right].$$

Il ne faut pas ajouter de constante, puisque l'aire est nulle pour $x=0$. On aura la moitié de la surface de l'ellipsoïde en faisant $x=a$, ce qui donne, pour la surface entière,

$$2\pi b^2+\frac{2\pi ba}{e}\arcsin e.$$

Si $e=0$, $a=b$, et l'ellipsoïde devient une sphère; comme d'ailleurs $\frac{\arcsin e}{e}$ tend vers l'unité à mesure que e tend vers zéro, on aura $4\pi a^2$ pour la surface de la sphère dont le rayon est a.

Supposons, en second lieu, $a<b$ et posons

$$b^2-a^2=b^2e^2;$$

l'expression de l'aire, à partir de $x = 0$, sera

$$\frac{2\pi b^2 e}{a^2}\int_0^x dx\sqrt{\frac{a^4}{b^2e^2}+x^2} = \frac{\pi b^2 e}{a^2}\left[x\sqrt{\frac{a^4}{b^2e^2}+x^2}+\frac{a^4}{b^2e^2}\mathrm{l}\left(\frac{x+\sqrt{\frac{a^4}{b^2e^2}+x^2}}{\frac{a^2}{be}}\right)\right].$$

Si l'on fait $x = a$, on aura la moitié de la surface de l'ellipsoïde, et la surface entière aura pour expression

$$2\pi b\sqrt{a^2+b^2e^2}+\frac{2\pi a^2}{e}\mathrm{l}\frac{be+\sqrt{a^2+b^2e^2}}{a}.$$

On retrouve encore la surface de la sphère, quand on suppose $e = 0$. En effet, la première partie devient $2\pi a^2$; pour obtenir la seconde, on développera $\sqrt{a^2+b^2e^2}$ en série, ce qui est permis, puisque b^2e^2 tendant vers zéro est plus petit que a^2, et l'on trouvera encore $2\pi a^2$; ce qui donnera $4\pi a^2$ pour l'aire totale de la sphère.

306. *Surface du tore.* — Supposons qu'on fasse tourner autour de l'axe des x le cercle dont l'équation est

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 = \mathrm{R}^2;$$

la partie supérieure engendrera une surface dont la différentielle sera

$$2\pi\left[\beta+\sqrt{\mathrm{R}^2-(x-\alpha)^2}\right]ds.$$

La différentielle de l'aire engendrée par la partie inférieure sera

$$2\pi\left[\beta-\sqrt{\mathrm{R}^2-(x-\alpha)^2}\right]ds.$$

Si on les suppose comprises entre les deux mêmes plans perpendiculaires à l'axe, x et ds seront les mêmes, et la somme des deux différentielles sera $4\pi\beta ds$, dont l'intégrale est $4\pi\beta s + \mathrm{C}$.

On aura la surface entière en prenant s égal à la demi-circonférence πR, et $C = 0$; ce qui donnera

$$4\pi^2 6R, \quad \text{ou} \quad 2\pi R 2\pi 6.$$

La surface du solide entier est donc égale au produit de la circonférence génératrice par la circonférence décrite par son centre.

On peut calculer séparément la surface engendrée par la partie supérieure, et par la partie inférieure de la circonférence. En effet, la première est

$$2\pi\left[6s + \int ds\sqrt{R^2 - (x-\alpha)^2}\right] = 2\pi(6s + \int R dx)$$
$$= 2\pi(6s + Rx + C).$$

Pour avoir la partie supérieure tout entière, il faut prendre pour x les limites $\alpha - R$, $\alpha + R$, et donner à s la valeur πR; ce qui donne

$$2\pi^2 6R + 4\pi R^2.$$

Dans le calcul de la partie inférieure, il n'y aura que le second terme à changer de signe, et l'on trouvera

$$2\pi^2 6R - 4\pi R^2.$$

Leur somme est $4\pi^2 6R$, comme nous l'avions déjà trouvé. Leur différence est $8\pi R^2$, ou le double de la surface de la sphère dont le rayon est R; il est remarquable que cette différence soit indépendante de la distance du cercle à l'axe de rotation.

Volume des corps terminés par des surfaces quelconques.

307. Si l'on partage un corps en éléments infiniment petits par des plans perpendiculaires à l'un des axes des coordonnées rectangulaires, on pourra substituer à ces

éléments des cylindres ayant pour bases les sections faites par ces plans, et pour hauteurs les distances de ces mêmes plans, parce que la limite du rapport de ces cylindres aux éléments du corps est l'unité.

Donc, si l'on peut obtenir en fonction de x l'expression de l'aire de la section faite dans le corps par un plan quelconque perpendiculaire à l'axe des x, la différentielle du volume sera $F(x)\,dx$, en désignant par $F(x)$ l'aire de la section; et le volume du corps compris entre deux plans perpendiculaires à l'axe des x, et correspondants aux abscisses x_0, x, aura pour expression $\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx$. Le problème sera donc ramené à l'intégration d'une fonction connue d'une seule variable. Si l'on ne peut exprimer immédiatement l'aire de la section, on en obtiendra la valeur au moyen d'une première intégration. Représentons par z et z' les ordonnées de la partie supérieure et de la partie inférieure de la surface. Ce sont des fonctions données de x et y, qui pourront être de nature différente. L'aire de la section correspondante à une valeur quelconque de x aura pour expression $\int(z-z')dy$, y variant seul et x restant constant dans les fonctions z et z'. Les limites de cette intégrale seront les valeurs de y correspondantes aux points extrêmes de la section; ces points seront, en général, ceux où la tangente à la courbe est parallèle à l'axe des z; et si l'on considère l'ensemble de toutes les sections, ces points se projettent sur le plan XY suivant la trace du cylindre circonscrit au corps, et ayant ses arêtes parallèles à l'axe des z. Ces valeurs de y qui sont les limites de cette première intégrale sont donc des fonctions connues de x, et, par conséquent, $\int(z-z')\,dy$ sera une fonction de x, que nous supposerons que l'on puisse former, et que nous représenterons par $F(x)$. La question est alors ramenée

au premier cas, et il suffira de calculer $\int F(x)dx$, entre les deux limites données pour x. Ces deux intégrations successives s'expriment de la manière suivante :

$$\int_{x_0}^{x} dx \int_{y_0}^{y} (z - z')\, dy;$$

y_0 et y désignent les deux fonctions de x qui expriment les ordonnées de la trace sur XY, du cylindre circonscrit au solide, et ayant ses arêtes parallèles à l'axe des z.

Ce calcul n'exige donc que deux intégrations de fonctions d'une seule variable.

On peut remarquer que ce procédé revient à calculer la somme des expressions de la forme $(z - z')\,dydx$, quand on donne à x et y toutes les valeurs comprises dans la projection du solide sur XY et variant par intervalles infiniment petits dx, dy. Cette expression est la mesure du parallélipipède ayant pour base $dxdy$ et pour hauteur $z - z'$; et ce volume peut être substitué à l'élément du solide qui est compris entre les quatre faces latérales de ce parallélipipède, parce que la limite de leur rapport est l'unité. La somme de ces éléments compris entre les deux plans dont la distance est dx, sera exprimée par

$$dx \int_{y_0}^{y} (z - z')\, dy,$$

et la somme de ces dernières expressions, relatives à toutes les valeurs de dx, sera la somme de tous les éléments $(z - z')\, dxdy$ du solide.

308. Déterminons maintenant l'équation de la trace du cylindre circonscrit au corps et parallèle à l'axe des z.

Soit $F(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface du corps; le plan tangent au point (x', y', z') aura pour équation

$$(x - x')\frac{dF}{dx'} + (y - y')\frac{dF}{dy'} + (z - z')\frac{dF}{dz'} = 0.$$

En un point quelconque de la courbe de contact du cylindre et de la surface donnée, le plan tangent est parallèle à l'axe des z, et, par conséquent, $\frac{dF}{dz'} = 0$; les équations de cette courbe seront donc

$$F(x, y, z) = 0, \quad \frac{dF}{dz} = 0.$$

Si on élimine z entre ces équations, on aura sa projection sur XY, qui est la courbe demandée. Supposons que son équation soit $\varphi(x, y) = 0$, les valeurs de y qu'on en tirera seront les limites de l'intégrale prise par rapport à y.

Quant aux limites x_0, x, ce sont deux valeurs arbitraires. Si l'on veut avoir le volume entier du corps, ces limites correspondront aux points extrêmes de la trace du cylindre, et s'obtiendront en cherchant les points de cette courbe où la tangente est parallèle à l'axe des y, ou encore les points de la surface où le plan tangent est perpendiculaire à l'axe des x; ils seront déterminés par les trois équations.

$$F(x, y, z) = 0, \qquad \frac{dF}{dz} = 0, \qquad \frac{dF}{dy} = 0.$$

309. Si l'on avait pour objet de trouver le volume du corps, qui se trouve renfermé dans l'intérieur du cylindre, ayant ses arêtes parallèles à l'axe des z et une base donnée par son équation sur le plan XY, les limites de l'intégration par rapport à y seraient les fonctions de x que l'on trouverait en résolvant cette équation par rapport à y.

310. *Ellipsoïde.* — L'équation de l'ellipsoïde rapporté à ses axes est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

La section par un plan perpendiculaire à l'axe des x

est une ellipse ayant pour équation

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2},$$

x désignant la distance de ce plan à l'origine, constante pour une même section, et variable d'une section à une autre. On peut calculer l'aire de la section au moyen de la formule que nous avons donnée pour la quadrature de l'ellipse.

Les demi-axes étant, dans ce cas,

$$b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},\quad c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},$$

l'aire de la section sera

$$\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right);$$

ce sera la valeur de l'intégrale

$$\int_{y_0}^{y}(z-z')\,dy.$$

Reste donc à intégrer

$$\pi bc\int_{x_0}^{x}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx,$$

ce qui donne

$$\pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}-x_0+\frac{x_0^3}{3a^2}\right);$$

Si l'on fait $x_0=-a$, $x=a$, on aura le volume entier de l'ellipsoïde, et son expression sera $\frac{4}{3}\pi abc$.

On voit que le volume de l'ellipsoïde est les deux tiers du cylindre droit circonscrit, ayant ses arêtes parallèles à l'un quelconque des axes.

311. Si les axes ne sont pas rectangulaires, les calculs

ne différeront que par des facteurs constants. Soient λ l'angle de l'axe des z avec l'axe des y, et μ l'angle de l'axe des x avec le plan YZ. La section faite par un plan parallèle à YZ aura pour expression

$$\int_{y_0}^{y}(z-z')\,dy\sin\lambda,$$

et le volume compris entre ce plan et le plan infiniment voisin sera

$$\sin\mu dx\int_{y_0}^{y}(z-z')\,dy\sin\lambda.$$

Le volume cherché sera donc exprimé par

$$\sin\mu\sin\lambda\int_{x_0}^{x}dx\int_{y_0}^{y}(z-z')\,dy.$$

Dans le cas de l'ellipsoïde rapporté à des diamètres conjugués $2a'$, $2b'$, $2c'$, on trouvera $\frac{4}{3}\pi a'b'c'\sin\mu\sin\lambda$.

Cette expression devant être égale à $\frac{4}{3}\pi abc$, il en résulte $a'b'c'\sin\mu\sin\lambda = abc$, ce qui montre que le parallélipipède construit sur les diamètres conjugués est constant. On voit encore que le volume de l'ellipsoïde est les deux tiers de celui du cylindre circonscrit, ayant ses arêtes parallèles à un diamètre quelconque, et ses bases parallèles au plan conjugué de ce diamètre. Ce qui prouve que tous les cylindres circonscrits de cette manière à l'ellipsoïde sont équivalents.

312. Si l'équation de la surface qui termine le corps est donnée en coordonnées polaires r, θ, ψ, il est convenable d'exprimer la différentielle du volume dans le même système. Pour cela on concevra une sphère décrite du pôle comme centre avec l'unité pour rayon; et l'on partagera sa surface par des grands cercles infiniment rapprochés dont les plans passent par l'axe AZ, et par des

petits cercles dont les plans soient parallèles à XY, et à des distances infiniment petites les uns des autres. L'expression générale des quadrilatères qui composeront la surface de la sphère sera $\sin\theta d\theta d\psi$. On concevra ensuite un cône ayant son sommet au pôle et ce quadrilatère pour base, et l'on cherchera le volume du corps, qui se trouve compris dans ce cône indéfini. La partie de ce volume comprise entre deux sphères ayant pour rayon r et $r+dr$, aura pour mesure

$$r^2 \sin\theta dr\, d\theta d\psi.$$

Si donc on intègre cette expression par rapport à r entre les deux valeurs r_0 et r, relatives aux deux surfaces qui terminent le corps, on aura le volume du corps compris dans le cône que l'on a considéré. Sa valeur est

$$\tfrac{1}{3}(r^3 - r_0^3)\sin\theta d\theta d\psi;$$

r et r_0 sont des fonctions connues de θ et ψ. Si maintenant on intègre par rapport à θ entre les deux valeurs relatives aux limites du corps, et qui sont des fonctions connues de ψ, on aura

$$\frac{d\psi}{3}\int_{\theta_0}^{\theta}(r^3 - r_0^3)\sin\theta d\theta.$$

Le résultat de cette intégration sera une fonction de ψ, que l'on intégrera entre les deux valeurs relatives aux plans entre lesquels le corps est renfermé.

Si le pôle est dans l'intérieur du corps, les limites de θ sont o et π; celles de ψ sont o et 2π; et la première limite de ρ est zéro. Le volume est alors exprimé par

$$\tfrac{1}{3}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^3 \sin\theta d\theta\, d\psi.$$

Quadrature des surfaces courbes quelconques.

313. D'après ce que nous avons dit sur le sens qu'il fallait attacher à l'aire des surfaces courbes, si nous divisons une surface quelconque par des plans infiniment voisins, perpendiculaires, les uns à l'axe des x, les autres à l'axe des y, chacun des quadrilatères qui composeront la surface, et dont la projection sur XY sera $dxdy$, pourra être remplacé par la partie du plan tangent en un quelconque des points de la surface de ce quadrilatère, qui aura la même projection $dxdy$.

Nous supposerons que ce plan tangent soit mené au point de la surface qui se projette en un des sommets du quadrilatère $dxdy$, et nous choisirons celui dont l'x est le plus petit, ainsi que l'y; de sorte que ses coordonnées étant x, y, celles du sommet opposé soient $x+dx$, $y+dy$. Cela posé, l'aire d'une surface plane étant égale à sa projection orthogonale, divisée par le cosinus de l'angle de son plan avec le plan de projection, on aura, en désignant par s l'aire de la surface courbe

$$ds = dxdy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2} = dxdy\sqrt{1+p^2+q^2},$$

$\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, ou p, q étant les dérivées partielles de la fonction de x et y qui représente l'ordonnée de la surface.

Ainsi, pour obtenir la surface qui se projettera sur le plan XY dans l'intérieur d'une courbe, donnée par l'équation $\varphi(x,y)=0$, on cherchera d'abord la partie comprise entre deux plans perpendiculaires à l'axe des x, et distants l'un de l'autre de la quantité infiniment petite dx. Pour cela on intégrera par rapport à y, en considérant x comme constant, l'expression $dxdy\sqrt{1+p^2+q^2}$; les

limites de cette intégrale seront les valeurs de y données par l'équation $\varphi(x, y) = 0$. Désignons ces deux fonctions de x par y_0, y. L'aire comprise entre les deux plans sera donc une fonction de x exprimée par

$$dx \int_{y_0}^{y} dy \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Si maintenant on intègre cette expression par rapport à x, entre les deux valeurs relatives aux limites de la courbe $\psi(x, y) = 0$ et qui satisferont à l'équation

$$\frac{d\varphi}{dy} = 0,$$

on aura un résultat qui ne renfermera plus ni x ni y, et sera la mesure de l'aire demandée.

314. Si l'on veut avoir la surface entière d'un corps fini, il suffira de prendre pour l'équation $\varphi(x, y) = 0$, celle de la courbe dans l'intérieur de laquelle se projette le corps, et de considérer, successivement ou en même temps, la partie inférieure et la partie supérieure de la surface. Cette courbe se déterminera, comme nous l'avons indiqué, dans la mesure des volumes.

315. *Application à la sphère.* — L'équation de la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

donne

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z},$$

$$ds = dxdy\sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} = \frac{Rdxdy}{z} = \frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = \text{arc sin} \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Dans ce cas, les limites de y sont

$$-\sqrt{R^2-x^2} \quad \text{et} \quad +\sqrt{R^2-x^2};$$

donc

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} = \pi.$$

Il reste donc à intégrer $\pi R dx$ entre $x=-R$, $x=+R$, ce qui donne $2\pi R^2$ pour l'expression de la surface supérieure; on trouverait le même résultat pour la surface inférieure, et la surface totale sera égale à $4\pi R^2$.

FIN.

NOTE I.

Règles sur la convergence des séries.

On appelle *série* une suite de termes positifs ou négatifs, dont le nombre est infini.

On dit qu'une série est *convergente* lorsque la somme algébrique des n premiers termes tend vers une limite déterminée, à mesure que n augmente indéfiniment. Elle est *divergente* dans le cas contraire.

Le développement en séries peut être très-utile pour la détermination approchée des grandeurs, soit constantes, soit variables. Mais on ne peut évidemment, dans des calculs soit numériques, soit algébriques, remplacer une quantité quelconque par une série, que lorsque celle-ci a pour limite cette quantité même. Il est donc nécessaire de connaître quelques caractères, d'après lesquels on puisse juger si une série donnée est ou n'est pas convergente. Nous allons exposer les règles les plus simples qui ont été données à cet effet, et dont quelques-unes sont tirées du *Cours d'Analyse* de M. Cauchy.

Nous remarquerons d'abord que la somme des termes d'une série ne peut tendre vers une limite déterminée, si la grandeur des termes ne tend pas vers zéro. Cela est tout à fait évident, lorsque les termes sont tous de même signe, parce qu'alors leur somme croîtrait indéfiniment avec leur nombre. Mais, lors même qu'ils seraient de signes différents, les sommes successives ne pourraient avoir une différence moindre que toute quantité donnée avec une grandeur déterminée, puisque deux sommes consécutives auraient toujours entre elles une différence finie, qui serait le terme auquel s'arrête la dernière.

Il est donc indispensable, pour qu'une série soit convergente, que ses termes aient pour limite zéro; mais cela n'est pas suffisant, comme nous aurons occasion de le reconnaître. Il faut toujours s'assurer qu'en prenant un assez grand nombre de termes, à partir du commencement, la somme des suivants, quelque nombre que l'on en prenne, est au-dessous d'une quantité qui peut être supposée aussi petite que l'on voudra.

Il est encore bon de remarquer que si une série dont tous les termes sont positifs est convergente, elle le sera encore quand on multipliera tous ses termes par un même nombre quelconque, ou même par des nombres différents, positifs ou négatifs, pourvu qu'ils restent finis. En effet, puisque la somme des termes de la première série, qui sont au delà d'un certain rang, peut être supposée moindre que toute grandeur donnée, il en sera de même dans la seconde; car la somme de ses termes au delà du même rang, lors même qu'on les prendrait tous avec le même signe, sera moindre que la somme des correspondants de la première, multipliée par le plus grand des facteurs introduits, qui est supposé fini.

316. La série

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

offre un exemple d'une suite indéfinie de termes décroissant indéfiniment, et dont la somme n'a pas de limite. En effet, faisons la somme des n termes qui suivent $\frac{1}{n}$, on a

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}:$$

elle est évidemment plus grande que

$$\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}\quad\text{ou}\quad\frac{n}{2n},\quad\text{ou enfin}\quad\frac{1}{2}.$$

Donc, à quelque terme que l'on s'arrête dans la série en question, on peut toujours en prendre un assez grand nombre à la suite, pour obtenir un nombre plus grand que $\frac{1}{2}$; et, par conséquent, la somme des termes de cette série ne tend pas vers une limite, et peut croître indéfiniment.

Séries dont tous les termes sont positifs.

317. Premier théorème. — *Une série est convergente, lorsque le rapport d'un terme au précédent tend vers une limite plus petite que l'unité, à mesure que le nombre qui exprime son rang devient de plus en plus grand. Elle est divergente lorsque cette limite est plus grande que l'unité.*

Soit la série

$$u_0 + u_1 + u_2 \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots,$$

et supposons que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ait une limite k plus petite que l'unité. Soit α un nombre déterminé quelconque, compris entre 1 et k; $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ finira par être constamment inférieur à α, quand n aura dépassé une certaine valeur. En considérant la série à partir d'un terme quelconque, au delà de cette valeur, on aura cette suite indéfinie d'inégalités

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \alpha, \quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < \alpha, \quad \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} < \alpha, \ldots,$$

d'où résulte

$$u_{n+1} < \alpha u_n, \quad u_{n+2} < \alpha^2 u_n, \quad u_{n+3} < \alpha^3 u_n, \ldots.$$

Tous les termes, à partir de u_{n+1}, sont donc inférieurs à ceux de la suite

$$\alpha u_n + \alpha^2 u_n + \alpha^3 u_n,$$

qui est une progression géométrique décroissante, et qui a, par conséquent, une limite. Donc aussi la série proposée a une limite, puisque la somme de ses termes, tous positifs, va constamment en augmentant, et reste néanmoins au-dessous d'une certaine quantité finie.

Il est même facile d'apprécier l'erreur commise en s'arrêtant à un terme quelconque. En effet, on a

$$u_n + u_{n+1} + \ldots < u_n(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots);$$

donc

$$\lim (u_n + u_{n+1} + \ldots) < \frac{u_n}{1-\alpha}.$$

L'erreur commise en s'arrêtant au terme u_{n-1} inclusivement est donc moindre que $\frac{u_n}{1-\alpha}$. Or u_n est une quantité connue, qui peut être aussi petite que l'on voudra, puisque les termes de la série, étant au-dessous de ceux d'une progression géométrique décroissante, peuvent devenir moindres que toute quantité donnée : quant à α, il sera en général assez facile d'en avoir une valeur suffisamment approchée.

Il est évident que notre raisonnement ne suppose pas que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ait réellement une limite, mais seulement qu'il finisse par être toujours au-dessous d'un nombre déterminé, plus petit que l'unité. Nous nous sommes exprimé ainsi, parce que ce n'est que dans des cas très-exceptionnels que cette fonction de n a une valeur indéterminée lorsque n augmente indéfiniment. Cette remarque s'appliquera à tout ce qui suit.

318. Si, au contraire, on avait $k > 1$, on finirait par avoir $\frac{u_{n+1}}{u_n} > \alpha$, α étant compris entre 1 et k, et, par conséquent, plus grand que l'unité. On aurait alors

$$u_{n+1} > \alpha u_n, \quad u_{n+2} > \alpha^2 u_n, \ldots$$

Les termes de la série proposée croîtraient donc indéfiniment, et, par conséquent, à plus forte raison la série n'aurait pas de limite. Elle serait donc divergente.

Si l'on avait $k = 1$; on ne pourrait rien affirmer; et, dans ce cas, il peut arriver qu'une série soit convergente, ou qu'elle soit divergente.

319. Toutefois il est bon de remarquer que si le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ finit par être toujours au-dessus de sa limite 1, la série est divergente; car alors les termes finissent par aller toujours en croissant, et, comme ils sont tous positifs, leur somme peut devenir plus grande que toute quantité donnée, puisqu'il en serait ainsi lors même qu'ils conserveraient une valeur constante, quelque petite qu'elle fût.

320. Si la série est ordonnée par rapport aux puissances d'une variable x, et que l'on ait généralement $u_n = A_n x^n$, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ deviendra $\frac{A_{n+1}}{A_n} x$; et, en désignant par k la limite du rapport $\frac{A_{n+1}}{A_n}$, la condition de convergence sera

$$kx < 1;$$

d'où l'on tire

$$x < \frac{1}{k}.$$

Ainsi la série sera convergente tant que x sera plus petit que $\frac{1}{k}$, et divergente quand il sera plus grand que $\frac{1}{k}$. Il pourra y avoir incertitude quand x sera égal à $\frac{1}{k}$.

Des remarques analogues pourront être faites au sujet des règles suivantes.

En appliquant la règle précédente à la série

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots n}+\ldots,$$

on trouve

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{n+1},$$

et, par conséquent,

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=0;$$

la série est donc convergente. Sa limite est fractionnaire et comprise entre 2 et 3; car la suite des termes $\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\ldots$ est inférieure à ceux de la progression qui commencerait par les deux premiers termes, et la limite de cette dernière est moindre que l'unité. Pour avoir une limite de l'erreur commise en s'arrêtant au terme $\frac{1}{1.2\ldots n}$, on remarquera que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ allant toujours en diminuant, les termes suivants sont au-dessous de ceux de la progression géométrique dont les deux premiers termes seraient ceux qui suivent immédiatement $\frac{1}{1.2\ldots n}$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{1.2\ldots(n+1)}\quad\text{et}\quad\frac{1}{1.2\ldots(n+1)(n+2)}.$$

Donc la somme des termes qu'on néglige dans la proposée est inférieure à la limite de la somme des termes de cette progression, qui est

$$\frac{n+2}{1.2\ldots n(n+1)^2}.$$

C'est donc là une limite de l'erreur commise en s'arrêtant à $\frac{1}{1.2\ldots n}$.

On pourrait prendre, à plus forte raison, comme limite, l'expression plus simple

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)n},$$

dont la valeur est plus grande que la première.

Cette série est d'un grand usage dans l'analyse, et l'on désigne ordinairement sa limite par la lettre e.

Il est facile de démontrer que sa valeur est incommensurable.

En effet, supposons qu'elle soit commensurable ; comme elle n'est pas entière, elle sera représentée par une expression fractionnaire irréductible $\frac{p}{q}$, q étant > 1; on aurait ainsi l'égalité

$$\frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots.$$

En multipliant les deux membres par $1.2.3\ldots q$, on aurait

$$1.2\ldots(q-1)p = 1.2\ldots q + 2\ldots q + 3\ldots q + \ldots 1$$
$$+ \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots.$$

Or la limite de la somme des termes fractionnaires du second membre est plus petite que l'unité, puisque ces termes sont inférieurs à ceux de la progression géométrique

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \ldots$$

dont la limite est $\frac{1}{q}$, et, par conséquent, plus petite que l'unité. Donc la limite du second membre de la dernière équation ne serait pas égale au premier; ce qui est absurde. Il résulte de là que la limite de la série proposée ne

pouvait être égalée à un nombre commensurable. Cette limite est donc incommensurable, comme nous voulions le démontrer.

321. La quantité que nous avons désignée par e peut être considérée comme la limite d'une autre expression remarquable que nous allons faire connaître.

Désignons par m un nombre entier positif croissant indéfiniment, et considérons l'expression

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$

qui se présente sous la forme indéterminée 1^∞, quand on y fait m infini. Pour déterminer la limite vers laquelle elle tend, quand m croît indéfiniment, développons-la suivant la formule ordinaire du binôme; nous aurons

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+\frac{m}{1}\cdot\frac{1}{m}+\frac{m(m-1)}{1.2}\,\frac{1}{m^2}+\ldots$$
$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}\,\frac{1}{m^n}+\ldots+\frac{1}{m^m}.$$

Tous les termes du second membre sont positifs, et leur nombre est fini et égal à $m+1$. On peut mettre cette équation sous la forme

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}&\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+\frac{1}{1}+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)}{1.2}+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3}+\ldots\\&\qquad+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1.2\ldots n}+\ldots\end{aligned}\right.$$

On voit d'abord qu'un terme quelconque, de rang déterminé et invariable, augmente en même temps que m; et comme le nombre total des termes augmente aussi,

leur somme augmente constamment. D'où il suit que $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ augmente en même temps que m.

On reconnait encore que les numérateurs des termes qui forment le second membre de l'équation (1), étant moindres que l'unité, ces termes sont au-dessous des correspondants de la série

$$(2) \qquad 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots n}+\ldots$$

dont la limite est e. D'où l'on conclut déjà que $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ est toujours moindre que e; mais nous allons démontrer qu'il s'en approche indéfiniment.

En effet, le terme qui en a n avant lui dans le développement (1) tend indéfiniment vers $\frac{1}{1.2\ldots n}$ à mesure que m croît. Donc la somme des $n+1$ premiers termes de ce développement peut différer aussi peu qu'on voudra de la somme s_n des correspondants de la série (2), quelque grand que soit le nombre déterminé n. Mais la différence entre s_n et e peut devenir moindre que toute quantité donnée; donc il en est de même de celle qui existe entre e et la somme des $n+1$ premiers termes du développement (1), et, à plus forte raison, de la différence qui existe entre e et le développement (1) tout entier, ou $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$. Donc enfin $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ tend vers la limite e lorsque m croît indéfiniment, en restant toujours entier.

Considérons maintenant des valeurs positives, non entières pour m. Faisons $m=n+\varepsilon$, ε étant une quantité positive moindre que l'unité. L'expression $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ devient $\left(1+\frac{1}{n+\varepsilon}\right)^{n+\varepsilon}$: or on la rendra plus grande si l'on

diminue le dénominateur $n+\varepsilon$, et qu'on augmente l'exposant $n+\varepsilon$; et on la rendra plus petite en augmentant le dénominateur et diminuant l'exposant. L'expression proposée sera donc comprise entre les deux suivantes :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \text{et} \quad \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n},$$

que l'on peut mettre respectivement sous la forme

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}.$$

Or il est évident qu'elles tendent l'une et l'autre vers la limite e, puisque n est entier, et que d'ailleurs le facteur $1+\frac{1}{n}$ et le diviseur $1+\frac{1}{n+1}$ tendent vers l'unité à mesure que n augmente. Donc enfin la quantité intermédiaire $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$ tend vers e, de quelque manière que varie la quantité positive, indéfiniment croissante, désignée par m.

Si l'on pose $\frac{1}{m}=\alpha$, on énoncera le même résultat de cette autre manière :

L'expression $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ tend vers la limite e lorsque α est une quantité positive qui tend vers zéro, suivant une loi quelconque.

Il reste à considérer le cas de $\frac{1}{m}$, ou de α, négatif et tendant vers zéro. On posera, dans ce cas, $1+\alpha=\frac{1}{1+6}$; 6 sera une quantité positive tendant vers zéro. On tirera

de cette relation,

$$\alpha = \frac{-\beta}{1+\beta},$$

et, par suite,

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = (1+\beta)^{\frac{1+\beta}{\beta}} = (1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}(1+\beta).$$

Or β étant positif, $(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}$ tend vers e, lorsque β tend vers zéro; de plus, $1+\beta$ tend vers l'unité; donc $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ tend encore vers e, lorsque α est négatif.

Ainsi, *de quelque manière que la quantité* α *tende vers zéro, l'expression* $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ *tend vers la limite* e.

322. Si au lieu de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ on avait développé $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$, on aurait trouvé pour limite, au lieu de la série (2), la suivante :

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{x^n}{1.2\ldots n}+\ldots,$$

qui est convergente, quel que soit x, en vertu de la règle précédente. Or

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = \left[\left(1+\frac{x}{m}\right)^{\frac{m}{x}}\right]^x = \left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^x,$$

en posant $\frac{x}{m} = \alpha$; et α tend vers zéro, quel que soit x, lorsque m croît indéfiniment : donc $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ a pour limite e^x, quel que soit x, et l'on a, par conséquent, l'identité suivante :

$$e^x = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{x^n}{1.2.n}+\ldots.$$

Ce développement important conduit immédiatement à celui de a^x, a étant un nombre quelconque. En effet, $a = e^{1a}$, la caractéristique l désignant les logarithmes dans la base e, qui est celle de Néper. On aura, par suite, $a^x = e^{x1a}$, et, par conséquent,

$$a^x = 1 + \frac{x\,1a}{1} + \frac{x^2 1^2 a}{1.2} + \frac{x^3 1^3 a}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n 1^n a}{1.2\ldots n} + \ldots$$

323. Considérons encore la série

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots;$$

elle sera convergente si l'on a

$$\lim \frac{n}{n+1} x < 1 \quad \text{ou} \quad x < 1.$$

Elle sera divergente si l'on a $x > 1$, et les termes croîtront indéfiniment. Lorsque l'on a $x = 1$, la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ devient l'unité, et nous avons dit qu'on ne peut, dans ce cas, prononcer, en général, sur la convergence et la divergence d'une série. Mais il n'y a pas ici d'incertitude; car la série devient

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

et nous avons reconnu précédemment que la somme des termes de cette série est infinie.

324. Deuxième théorème. — *Une série dont le terme général est u_n est convergente lorsque $u_n^{\frac{1}{n}}$ tend vers une limite k plus petite que l'unité, quand n augmente indéfiniment. Elle est divergente lorsque la limite k est plus grande que l'unité.*

Supposons d'abord $k < 1$, et soit α un nombre quel-

conque compris entre k et 1; d'après l'hypothèse, $u_n^{\frac{1}{n}}$ finira par être constamment moindre que α, depuis une certaine valeur de n jusqu'à l'infini. On aura alors les inégalités suivantes :

$$u_n^{\frac{1}{n}} < \alpha, \quad u_{n+1}^{\frac{1}{n+1}} < \alpha, \quad u_{n+2}^{\frac{1}{n+2}} < \alpha, \ldots;$$

d'où

$$u_n < \alpha^n, \quad u_{n+1} < \alpha^{n+1}, \quad u_{n+2} < \alpha^{n+2}, \ldots$$

Donc, à partir d'une valeur convenable de n, tous les termes de la série sont au-dessous de ceux de la progression géométrique décroissante

$$\alpha^n + \alpha^{n+1} + \alpha^{n+2} + \ldots;$$

donc la série proposée a une limite, et l'on aura une limite de l'erreur commise en s'arrêtant à u_{n-1} en prenant la limite de cette progression géométrique, qui est $\frac{\alpha^n}{1-\alpha}$.

Supposons maintenant $k > 1$, et soit encore α un nombre quelconque compris entre k et 1; on finira par avoir $u_n^{\frac{1}{n}} > \alpha$, au delà d'une certaine valeur de n, et l'on aura alors les inégalités

$$u_n > \alpha^n, \quad u_{n+1} > \alpha^{n+1}, \ldots;$$

d'où il suit qu'à partir de u_n, les termes de la série sont au-dessus de ceux de la progression géométrique croissante

$$\alpha^n + \alpha^{n+1} + \alpha^{n+2} + \ldots.$$

Ils croissent donc eux-mêmes indéfiniment, et la série proposée est divergente.

Enfin, si l'on avait $k=1$, on ne pourrait affirmer, en général, si la série est convergente ou divergente.

325. Troisième théorème. — *Si les termes d'une série*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1}$$

vont constamment en décroissant à partir du premier, cette série sera convergente ou divergente en même temps que la suivante :

$$u_0 + 2u_1 + 4u_3 + 8u_7 + 16u_{15} + \ldots \tag{2}$$

En effet, supposons d'abord la première série convergente. Ses termes allant constamment en décroissant, on aura les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
u_0 &= u_0,\\
2u_1 &= 2u_1,\\
4u_3 &< 2u_2 + 2u_3,\\
8u_7 &< 2u_4 + 2u_5 + 2u_6 + 2u_7,\\
16u_{15} &< 2u_8 + \ldots\ldots + 2u_{15},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Ajoutant membre à membre ces égalités et inégalités en nombre infini, on voit que la somme des premiers membres, qui sont les termes de la série (2), sera au-dessous de la somme de ceux de la suivante, terminés au même indice de u :

$$u_0 + 2u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 2u_4 + \ldots.$$

Or cette série n'est autre chose que la série (1) dont on aurait doublé les termes, excepté le premier. Elle a donc une limite, et, par conséquent, la série (2) en a une à plus forte raison. Ainsi, d'abord la convergence de la première série entraîne celle de la seconde. Supposons, en second lieu, la série (1) divergente, ses termes allant toujours en décroissant; on aura évidemment les rela-

tions suivantes :

$$u_0 = u_0,$$
$$2u_1 > u_1 + u_2,$$
$$4u_3 > u_3 + u_4 + u_5 + u_6,$$
$$8u_7 > u_7 + u_8 \ldots\ldots + u_{14}.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ajoutant les premiers membres entre eux, ainsi que les seconds, on reconnaît que la somme des termes de la série (2) est plus grande que la somme de ceux de la série (1), terminés à celui d'indice double; et comme cette dernière croît indéfiniment par hypothèse, il en est de même de l'autre. D'où il suit encore, comme on voulait le démontrer, que la divergence de la série (1) entraîne celle de la série (2). Donc, enfin, les deux séries proposées sont toujours en même temps convergentes ou divergentes.

326. Prenons par exemple, pour la série (1), la suivante :

$$(3) \qquad 1 + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \frac{1}{4^\mu} + \ldots;$$

la série (2) deviendra

$$1 + 2^{1-\mu} + 4^{1-\mu} + 8^{1-\mu} + \ldots.$$

Or cette dernière est une progression géométrique dont la raison est $2^{1-\mu}$. Elle est décroissante si l'on a $\mu > 1$, et croissante si $\mu < 1$ ou $\mu = 1$. Donc aussi la série (3) est convergente si $\mu > 1$, et divergente si $\mu < 1$, ou $\mu = 1$.

La conséquence relative à $\mu = 1$ montre que la série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

est infinie, comme nous l'avions déjà reconnu.

327. Quatrième théorème. — *La série*

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

est convergente lorsque, n croissant indéfiniment, $\frac{\mathrm{l}\frac{1}{u_n}}{\mathrm{l}\, n}$ *a une limite plus grande que l'unité. Elle est divergente si cette limite est plus petite que l'unité.*

En effet, soit h cette limite, et supposons d'abord $h > 1$. On aura donc, depuis une certaine valeur de n jusqu'à l'infini, α désignant un nombre compris entre 1 et h,

$$\frac{\mathrm{l}\frac{1}{u_n}}{\mathrm{l}\, n} > \alpha, \quad \text{ou} \quad u_n < \frac{1}{n^\alpha}.$$

Les termes de la série proposée, à partir de u_n, sont donc inférieurs à ceux de la suivante :

$$\frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \ldots.$$

Or celle-ci est convergente d'après le théorème précédent, puisque l'on a $\alpha > 1$; donc aussi la proposée est convergente.

Supposons en second lieu $h < 1$, et soit α un nombre compris entre 1 et h. On finira par avoir, au delà d'une certaine valeur de n,

$$\frac{\mathrm{l}\frac{1}{u_n}}{\mathrm{l}\, n} < \alpha, \quad \text{ou} \quad u_n < \frac{1}{n^\alpha}.$$

Les termes de la série proposée seront donc alors au-dessus de ceux de la suivante :

$$\frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \ldots.$$

Mais cette dernière est divergente, puisque l'on a $\alpha < 1$: donc la proposée l'est aussi; *ce qu'il fallait démontrer.*

328. Lorsque la limite h est l'unité, on ne peut, en général, prononcer sur la convergence ou la divergence de la série. Cependant, lorsque le rapport $\frac{\mathrm{l}\frac{1}{u_n}}{\mathrm{l}\,n}$ est toujours inférieur à sa limite 1, il est facile de démontrer que la série est divergente.

En effet, l'inégalité $\frac{\mathrm{l}\frac{1}{u_n}}{\mathrm{l}\,n} < 1$ donne

$$u_n > \frac{1}{n};$$

donc les termes de la série proposée sont au-dessus de ceux de la suivante :

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots,$$

que nous avons démontrée divergente. La proposée l'est donc elle-même.

Si le rapport $\frac{\mathrm{l}\frac{1}{u_n}}{\mathrm{l}\,n}$ était, au contraire, toujours supérieur à sa limite 1, on prouverait bien que les termes de la série proposée sont au-dessous de ceux de la suivante :

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots;$$

mais celle-ci étant divergente, on ne saurait en conclure que la proposée est convergente.

Autre règle pour la convergence des séries.

329. Remarquons d'abord que si l'on a une série convergente

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots,$$

et qu'une autre série

$$v_0 + v_1 + \ldots + v_n + v_{n+1} + \ldots$$

soit telle que, depuis un certain terme jusqu'à l'infini, l'on ait

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} < \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

cette seconde série sera convergente; car, si l'on multiplie la première par $\frac{v_n}{u_n}$, n ayant une valeur déterminée telle que la condition supposée soit remplie, la série ainsi obtenue sera encore convergente. Or tous les termes de la seconde, depuis v_n, se trouveront inférieurs aux termes correspondants de cette dernière; donc la seconde série sera elle-même convergente.

Cela posé, considérons une série

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots$$

telle que l'on ait

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1,$$

le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ étant toujours plus petit que l'unité, depuis une certaine valeur de n jusqu'à l'infini. On pourra mettre ce rapport sous la forme

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha},$$

α étant positif et tendant vers zéro.

Or nous allons démontrer que si l'on a

$$\lim n\alpha > 1,$$

la série sera convergente; et qu'elle sera divergente, si l'on a

$$\lim n\alpha < 1.$$

1°. Soit

$$\lim n\alpha = k \quad \text{et} \quad k > 1.$$

Désignons par m une quantité déterminée quelconque, comprise entre 1 et k, et, par conséquent, plus grande que l'unité. Il est facile de voir que, depuis une certaine valeur de n jusqu'à l'infini, on aura

$$1 + \alpha > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m.$$

En effet,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^m = 1 + \frac{m}{n} + \frac{m(m-1)}{1.2n^2} + \ldots;$$

et pour que l'inégalité précédente ait lieu, il suffira que l'on ait

$$\alpha > \frac{m}{n} + \frac{m(m-1)}{1.2.n^2} + \ldots,$$

ou

$$n\alpha > m + \frac{m(m-1)}{1.2.n} + \ldots.$$

Or le second membre tend vers m et le premier vers k, à mesure que n augmente : donc, depuis une valeur déterminée de n jusqu'à l'infini, l'inégalité aura lieu, puisque la limite de son premier membre est plus grande que la limite du second; donc depuis cette valeur de n jusqu'à l'infini, on aura

$$1 + \alpha > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m,$$

et, par suite,

$$\frac{1}{1+\alpha} < \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^m},$$

ou

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^m}.$$

Mais si l'on considère la série

$$(1) \qquad \frac{1}{1^m}+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\ldots+\frac{1}{n^m}+\frac{1}{(n+1)^m}+\ldots,$$

le rapport du terme général au précédent sera

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^m},$$

et, par conséquent, plus grand que dans la série proposée. De plus, la série (1) est convergente, puisque l'on a $m > 1$: donc aussi la série proposée est convergente; ce que nous nous proposions de démontrer.

2°. Soit maintenant

$$\lim n\alpha = k \quad \text{et} \quad k < 1.$$

Prenons une quantité quelconque, m comprise entre 1 et k, et, par suite, plus petite que l'unité; je dis que l'on finira par avoir constamment

$$1+\alpha < \left(1+\frac{1}{n}\right)^m,$$

ou

$$\alpha < \frac{m}{n} + \frac{m(m-1)}{1.2.n^2} + \ldots,$$

ou encore

$$n\alpha < m + \frac{m(m-1)}{1.2.n} + \ldots.$$

En effet, lorsque n croît indéfiniment, le premier membre tend vers k, et le second vers m, qui est plus grand que k. Donc, depuis une certaine valeur de n jusqu'à l'infini, les inégalités précédentes auront lieu; d'où il résultera

$$\frac{1}{1+\alpha} > \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^m},$$

et, par conséquent, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ finit par être constamment supérieur au rapport des termes correspondants de la série dont le terme général est $\frac{1}{n^m}$. Mais m étant plus petit que l'unité, cette dernière série est infinie; donc la proposée l'est aussi.

Donc enfin, comme nous l'avions annoncé, la série proposée sera convergente, si l'on a $\lim n\alpha > 1$; et divergente, si l'on a $\lim n\alpha < 1$.

330. On ne peut, en général, prononcer sur la nature de la série, lorsque l'on a

$$\lim n\alpha = 1.$$

Néanmoins, si $n\alpha$ est toujours plus petit que la limite 1, on peut affirmer que la série est divergente; car alors on a

$$\frac{1}{1+\alpha} > \frac{1}{1+\frac{1}{n}},$$

et le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est supérieur au rapport $\frac{n}{n+1}$ relatif à la série divergente

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots,$$

d'où il résulte que la série proposée est infinie.

Le seul cas qui reste douteux est donc celui où l'on a

$$\lim n\alpha = 1,$$

$n\alpha$ n'étant pas constamment plus petit que 1.

331. Appliquons cette règle à la série

$$1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}+\ldots$$
$$+\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots\ldots 2n}\,\frac{1}{2n+1}+\ldots.$$

On aura, dans ce cas,

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$$

et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)}=\frac{1}{1+\dfrac{6n+5}{(2n+1)^2}},$$

d'où

$$\alpha=\frac{6n+5}{(2n+1)^2},\quad n\alpha=\frac{6n^2+5n}{4n^2+4n+1},$$

et, par suite,

$$\lim n\alpha=\frac{6}{4}=1+\frac{1}{2};$$

d'où il résulte que la série proposée est convergente.

Considérons maintenant cette autre série

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}+\ldots+\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}+\ldots,$$

pour laquelle on a encore $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$. Le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ aura pour valeur

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2n+1}{2n+2}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{2n+1}}.$$

On aura donc

$$n\alpha = \frac{n}{2n+1},$$

et

$$\lim n\alpha = \frac{1}{2},$$

d'où il résulte que la série est divergente, et que la somme est infinie.

Autre règle déduite de la considération des intégrales définies.

332. Nous allons faire connaître encore une règle qui a été déduite de la considération des intégrales définies.

Soit la série

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots,$$

dont tous les termes, depuis une certaine valeur de n jusqu'à l'infini, sont positifs et décroissent constamment en tendant vers la limite zéro. Elle sera convergente ou divergente suivant que la somme des termes, à partir de cette valeur de n, tendra ou non vers une limite finie.

Supposons que l'expression du terme général soit une fonction de forme finie de n, et désignons par u_x une fonction de la variable x, obtenue en changeant n en x dans u_n. Cette fonction u_x reproduirait tous les termes de la série proposée, en y donnant à x toutes les valeurs entières et positives. Sa valeur allant constamment en décroissant quand on fait croître x par degrés égaux à l'unité, à partir d'une certaine valeur entière, il arrivera généralement que la fonction u_x ira constamment en décroissant lorsque x croîtra d'une manière continue depuis une certaine valeur jusqu'à l'infini.

Admettant qu'il en soit ainsi depuis la valeur entière

m, on aura

$$u_m > \int_m^{m+1} u_x dx, \quad u_{m+1} > \int_{m+1}^{m+2} u_x dx,$$

$$u_{m+2} > \int_{m+2}^{m+3} u_x dx, \ldots,$$

et

$$u_{m+1} < \int_m^{m+1} u_x dx, \quad u_{m+2} < \int_{m+1}^{m+2} u_x dx, \ldots,$$

d'où il résulte, en ajoutant respectivement ces deux séries d'inégalités, membre à membre,

$$\int_m^{\infty} u_x dx < u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots$$

et

$$\int_m^{\infty} u_x dx > u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots.$$

Or, si cette intégrale $\int_m^{\infty} u_x dx$ est finie, il s'ensuivra que la série à partir de u_{m+1} le sera de même; et si elle est infinie, la série commençant à u_m le sera aussi. D'où il résulte que la série proposée sera convergente ou divergente, suivant que l'intégrale

$$\int_m^{\infty} u_x dx$$

sera finie ou infinie.

333. Appliquons cette règle à la série, déjà examinée,

$$\frac{1}{1^a} + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \ldots + \frac{1}{n^a} + \ldots.$$

La fonction u_x est, dans ce cas, $\frac{1}{x^a}$, et va constamment en décroissant quand x augmente, a étant supposé positif.

Or $\int \frac{dx}{x^a} = \frac{x^{1-a}}{1-a} + C$; et, par suite, $\int_m^\infty \frac{dx}{x^a}$ est infinie, si l'on a $a < 1$, et finie si $a > 1$.

Si $a = 1$, on a

$$\int \frac{dx}{x^a} = \int \frac{dx}{x} = \log x + C,$$

quantité infinie en même temps que x.

Donc la série proposée est convergente si $a > 1$; et divergente si $a < 1$, ou $a = 1$.

334. Appliquons cette même règle à la série

$$\frac{\log 2}{2} + \frac{\log 3}{3} + \ldots + \frac{\log n}{n} + \ldots.$$

On a alors $u_x = \frac{\log x}{x}$, expression qui décroît constamment depuis la valeur de x pour laquelle $\log x = 1$. Or

$$\int \frac{dx \log x}{x} = \frac{\log^2 x}{2 \log e} + C.$$

Donc $\int_m^\infty u_x dx$ est infinie, et la série en question est divergente; ce qui montre que le produit $\sqrt[2]{2}\sqrt[3]{3}\sqrt[4]{4}\ldots\sqrt[n]{n}\ldots$ est infini. Notre première règle conduirait au même résultat, parce que l'on aurait

$$n\alpha = \frac{\log n - n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\log n + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)},$$

ce qui donne $\lim n\alpha = 1$. Mais comme on a évidemment $n\alpha < 1$, la série est divergente, d'après une remarque faite précédemment.

L'une et l'autre règle feraient voir que la série dont le terme général est $\left(\frac{\log n}{n}\right)^2$ est convergente.

Séries dont tous les termes ne sont pas de même signe.

335. Lorsqu'une série n'a pas tous ses termes de même signe, il est évident qu'elle sera convergente, si elle l'est quand on donne le même signe à tous ses termes, par exemple quand on les prend tous positifs. En effet, la somme des termes qui suivent l'un quelconque de ceux de la série proposée est moindre que la somme des correspondants de la seconde, quel que soit le nombre que l'on en considère, puisque tous ces termes s'ajoutent entre eux dans la seconde, tandis que les uns s'ajoutent et les autres se retranchent dans la première. Donc, puisqu'à partir d'un certain terme de la seconde, la somme des suivants a une limite qui peut devenir moindre que toute quantité donnée, il en est de même à plus forte raison dans la première; et, par conséquent, elle est convergente.

On peut donc d'abord appliquer à ces nouvelles séries les règles données pour celles dont tous les termes sont de même signe, tant pour reconnaître la convergence que pour calculer une limite de l'erreur commise en s'arrêtant à un terme quelconque. Mais ces règles ne dispensent pas d'en chercher de nouvelles, spécialement applicables aux séries dont tous les termes ne sont pas de même signe; parce qu'une pareille série peut être convergente, et devenir divergente quand on donne le même signe à tous ses termes. Nous nous bornerons à celle qui résulte du théorème suivant :

Théorème. — *Lorsque dans une série les termes finissent par être constamment décroissants, et alternativement positifs et négatifs, cette série est toujours convergente; et l'erreur commise, en s'arrêtant à un terme quelconque, est moindre que le suivant.*

Soit la série

$$u_0 + \ldots + u_n - u_{n+1} + u_{n+2} - u_{n+3} + \ldots$$

Désignons, en général, par s_m la somme des termes depuis le premier jusqu'à u_m inclusivement.

Nous remarquerons d'abord que la somme s_n de termes dont le dernier est positif ne peut être que diminuée par l'addition d'un nombre quelconque des termes suivants. En effet, pour passer de la somme s_n à s_{n+1}, il faut retrancher u_{n+1}; donc on a $s_{n+1} < s_n$. Pour obtenir la somme suivante s_{n+2}, il faut ajouter u_{n+2}, qui est moindre que le terme u_{n+1} qui a été retranché de s_n; donc on a encore $s_{n+2} < s_n$. Le même raisonnement se reproduisant indéfiniment, on voit que la somme s_n est plus grande que toutes celles dont l'indice est plus élevé.

On voit, au contraire, que si l'on s'arrête à un terme négatif, la somme sera toujours moindre que toutes celles dont l'indice est plus élevé.

Ainsi les sommes dont le dernier terme est positif vont toujours en diminuant; et celles dont le dernier terme est négatif augmentent constamment, en restant toujours au-dessous des premières. Ces deux suites de sommes se rapprochent donc de plus en plus à mesure qu'on avance dans la série, et leur différence tend vers zéro, puisqu'elle n'est autre chose que le dernier terme de la dernière, lequel tend vers zéro, par hypothèse, à mesure que son indice augmente indéfiniment.

Donc enfin *la somme des termes tend vers une limite déterminée, et l'erreur positive ou négative est toujours moindre que le terme qui suit celui auquel on s'est arrêté.*

Soit, par exemple, la série

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots$$

Le rapport d'un terme au précédent est exprimé généralement par $\frac{n}{n+1}x$, et sa limite est x. Ainsi, d'abord la série sera convergente si l'on a $x < 1$ en valeur absolue; divergente si $x > 1$. Lorsque $x = 1$, la série est convergente en vertu de la dernière règle, puisque les termes sont alternativement positifs et négatifs, et décroissent indéfiniment. Mais si l'on prenait $x = -1$, la série aurait une somme infinie.

Lorsque la série est convergente, l'erreur que l'on commet, c'est-à-dire la quantité que l'on omet, en s'arrêtant à $\frac{x^n}{n}$, est moindre que $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, et de même signe que ce terme.

Des séries imaginaires.

336. Lorsque les termes d'une série sont de la forme $u + v\sqrt{-1}$, on entend que cette série est convergente lorsque la somme des termes réels a une limite s, et que la somme des coefficients de $\sqrt{-1}$ tend de même vers une limite t: on dit alors que la limite de la série est $s + t\sqrt{-1}$.

On est ainsi ramené aux conditions de convergence de deux séries réelles. Mais il suffit souvent d'en considérer une seule, celle qui se rapporte aux modules des termes de la proposée.

En effet, on peut toujours poser

$$u + v\sqrt{-1} = \rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta),$$

et la série proposée prend la forme

$$(1)\quad \begin{cases} \rho_0(\cos\theta_0 + \sqrt{-1}\sin\theta_0) + \rho_1(\cos\theta_1 + \sqrt{-1}\sin\theta_1) + \ldots \\ \qquad + \rho_n(\cos\theta_n + \sqrt{-1}\sin\theta_n) + \ldots, \end{cases}$$

Or, si la série

$$(2)\qquad \rho_0 + \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_n + \ldots$$

est convergente, en prenant tous les termes positifs, il s'ensuit, à plus forte raison, que les deux suivantes :

$$(3)\qquad \begin{cases} \rho_0 \cos\theta_0 + \rho_1 \cos\theta_1 + \ldots + \rho_n \cos\theta_n + \ldots, \\ \rho_0 \sin\theta_0 + \rho_1 \sin\theta_1 + \ldots + \rho_n \sin\theta_n + \ldots \end{cases}$$

le seront elles-mêmes; car, à partir d'un terme quelconque, la somme des suivants jusqu'à l'infini est évidemment moindre que dans la première. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Une série imaginaire est convergente lorsque la série des valeurs absolues des modules de tous ses termes est convergente.

Lorsque la série (2) n'est pas convergente, il est possible que ses termes tendent ou ne tendent pas vers zéro. S'ils n'y tendent pas, les séries (3) ne peuvent être toutes deux convergentes; car, quelque valeur qu'on puisse supposer à l'angle θ, il est impossible que $\rho\cos\theta$ et $\rho\sin\theta$ tendent tous deux vers zéro, si ρ n'y tend pas. Les termes des deux séries (3) ne peuvent donc tendre vers zéro, ce qui est cependant une des conditions indispensables de la convergence. *La série* (1) *est donc, dans ce cas, divergente.*

En second lieu, si la série (2) étant divergente ses termes décroissent indéfiniment, il n'est pas impossible que les séries (3) soient convergentes, parce que tous leurs termes ne sont pas de même signe; on ne peut donc alors rien affirmer, en général, sur la convergence de la série proposée.

NOTE DEUXIÈME.

Sur les expressions imaginaires. Comment on les introduit dans les données du calcul.

337. La solution des équations du deuxième degré conduit quelquefois à extraire des racines carrées de quantités négatives. Ces sortes d'expressions ne représentent pas des nombres, soit positifs, soit négatifs; on les désigne sous le nom de *quantités imaginaires*. Nous n'avons pas pour objet d'examiner ici à quelles circonstances correspondent ces formes dans les questions proposées; nous nous bornerons à dire qu'en substituant ces expressions à l'inconnue, l'équation que l'on avait à résoudre devient identique, pourvu que les racines carrées des quantités négatives soient traitées d'après les règles ordinaires de l'algèbre, et qu'on considère leur carré comme s'obtenant par la suppression du radical.

Si l'on a, par exemple, l'équation

$$x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0,$$

on en tire les deux valeurs imaginaires

$$x = a \pm \sqrt{-b^2},$$

et l'on peut vérifier que la substitution de cette valeur dans l'équation la réduit à $0 = 0$.

Il en serait de même si, au lieu de $\sqrt{-b^2}$, on mettait $b\sqrt{-1}$, et c'est ce que l'on fait ordinairement, afin que la seule quantité imaginaire à considérer soit toujours $\sqrt{-1}$. Les valeurs de x se trouvent ainsi mises sous la forme

$$x = a \pm b\sqrt{-1}.$$

Il semble d'abord que toutes les considérations auxquelles ces sortes d'expressions peuvent donner lieu soient relatives aux circonstances qui leur donnent naissance dans les questions dont elles présentent la solution; mais on a trouvé de très-grands avantages à les introduire dans les données mêmes de certains calculs, et c'est sous ce point de vue que nous allons les considérer.

Sans attacher aucune idée de quantité à l'expression $\sqrt{-1}$, nous convenons de la traiter de la même manière que si c'était un nombre dont les puissances successives seraient

$$\sqrt{-1},\quad -1,\quad -\sqrt{-1},\quad +1,\quad \sqrt{-1},\ldots,$$

les quatre premières se reproduisant indéfiniment dans le même ordre.

Rien ne s'oppose à ce que l'on fasse des calculs algébriques dans lesquels $\sqrt{-1}$ soit traité de cette manière; il ne s'agit que de savoir s'il y a quelque intérêt à le faire, et si de pareilles opérations peuvent offrir de nouvelles ressources à l'analyse. Il pourra quelquefois être plus commode de remplacer $\sqrt{-1}$ par une lettre dont les puissances se distinguent toutes les unes des autres, tandis que celles de $\sqrt{-1}$ se reproduisent périodiquement. En désignant $\sqrt{-1}$ par λ, nous entendrons que λ soit traité comme un facteur ordinaire, d'après toutes les règles démontrées dans le cas des quantités réelles; seulement, après tous les calculs effectués, on remplacera les puissances

$$\lambda,\ \lambda^2,\ \lambda^3,\ \lambda^4,\ \lambda^5,\ \lambda^6,\ldots$$

par

$$\lambda,\ -1,\ -\lambda,\ +1,\ \lambda,\ -1,\ldots.$$

338. Lorsque nous poserons une équation entre des quantités réelles et imaginaires, comme

$$A + B\sqrt{-1} = A' + B'\sqrt{-1},$$

nous entendrons toujours que l'on savait d'avance que $A = A'$ et $B = B'$. Ces dernières équations ne seront jamais des conséquences de la première; c'est, au contraire, la première qui en est la conséquence, et nous n'attacherions aucun sens à cette équation si nous ne savions, indépendamment d'elle, que les parties réelles sont égales de part et d'autre, ainsi que les coefficients respectifs de $\sqrt{-1}$. Nous insistons sur ce point, parce que la plupart des auteurs l'entendent de la manière inverse.

339. Ayant bien établi de quelle manière nous traiterons l'expression $\sqrt{-1}$, nous allons montrer, par un premier exemple, l'avantage que l'on peut avoir à l'introduire dans le calcul.

Considérons les deux expressions

$$\cos x + \sqrt{-1}\sin x,\quad \cos y + \sqrt{-1}\sin y,$$

et multiplions-les entre elles, dans le sens que nous attachons ici à cette opération; nous trouverons

$$\cos x\cos y - \sin x\sin y + \sqrt{-1}\,(\sin x\cos y + \sin y\cos x),$$

ou

$$\cos(x+y) + \sqrt{-1}\sin(x+y).$$

Nous pouvons donc poser

$$(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)(\cos y + \sqrt{-1}\sin y) = \cos(x+y) + \sqrt{-1}\sin(x+y),$$

puisque nous avons prouvé d'avance que les parties réelles étaient respectivement égales, ainsi que les coefficients de $\sqrt{-1}$.

Et l'on conclut de là que pour diviser deux expressions de cette forme l'une par l'autre (en entendant par quotient une expression qui, multipliée par le diviseur suivant les règles convenues, reproduirait le dividende), il

suffit de retrancher l'arc qui se trouve au diviseur de celui qui entre dans le dividende.

En multipliant le produit de ces premières expressions par une troisième $\cos z + \sqrt{-1}\sin z$, il suffira encore d'ajouter les arcs $x+y$ et z, ce qui donnera la nouvelle équation

$$(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)(\cos y + \sqrt{-1}\sin y)(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)$$
$$= \cos(x+y+z) + \sqrt{-1}\sin(x+y+z);$$

et il est facile de voir que, quel que soit le nombre des facteurs de cette forme, leur produit effectué donnera toujours pour partie réelle le cosinus de la somme de tous les arcs, et pour coefficient de $\sqrt{-1}$ le sinus de cette même somme. On pourra donc poser une équation semblable à la dernière, en supposant un nombre m quelconque de facteurs, puisque les parties réelles sont démontrées égales, ainsi que les parties imaginaires. En supposant le cas particulier où $x = y = z = \ldots$, on aurait la formule suivante, qui est due à Moivre :

$$(1) \quad (\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^m = \cos mx + \sqrt{-1}\sin mx;$$

il est donc prouvé que, si l'on forme la puissance m du binôme $\cos x + \sqrt{-1}\sin x$ d'après les règles ordinaires, la partie réelle sera égale à $\cos mx$, et le coefficient de $\sqrt{-1}$ à $\sin mx$. Or le développement de la puissance m d'un binôme s'effectue au moyen d'une formule très-simple; on aura donc ainsi le développement général de $\cos mx$ et $\sin mx$, m étant un nombre entier quelconque. Ces formules sont

$$\cos mx = \cos^m x - \frac{m(m+1)}{1.2}\cos^{m-2} x \sin^2 x$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\cos^{m-4} x \sin^4 + \ldots,$$
$$\sin mx = m\cos^{m-1} x \sin x - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3} x \sin^3 x + \ldots$$

On peut observer que le développement de

$$(\cos x - \sqrt{-1}\sin x)^m$$

ne différerait de celui de

$$(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^m$$

que par le signe des termes où se trouvent les puissances impaires de $\sqrt{-1}$, et que, par conséquent,

$$(\cos x - \sqrt{-1}\sin x)^m = \cos mx - \sqrt{-1}\sin mx.$$

340. En entendant par racine $n^{\text{ième}}$ d'une expression imaginaire une autre expression qui, élevée à la puissance n, suivant le sens convenu, reproduirait la première, on voit que $\cos\frac{x}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{x}{n}$ est une racine de $\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x$, puisque nous avons prouvé que pour élever une semblable expression à la puissance $n^{\text{ième}}$, il suffit de multiplier l'arc par n. On a donc

$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{x}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{x}{n};$$

et si l'on élève les deux membres à la puissance p, il vient

$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)^{\frac{p}{n}} = \cos\frac{p}{n}x \pm \sqrt{-1}\sin\frac{p}{n}x,$$

ce qui montre que l'équation (1) est vraie quand m est un nombre fractionnaire quelconque $\frac{p}{n}$, en entendant seulement par là que $\cos\frac{p}{n}x \pm \sqrt{-1}\sin\frac{p}{n}x$, élevé à la puissance n, donnerait la puissance p de $\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x$, et que, par conséquent, il est une des racines $n^{\text{ièmes}}$ de cette puissance p.

L'équation (1) est encore vraie si m est égal à un nombre négatif $-n$. En effet,

$$(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^{-n} = \frac{1}{(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^n} = \frac{1}{(\cos nx + \sqrt{-1}\sin nx)};$$

or diviser par $\cos nx + \sqrt{-1}\sin nx$, c'est trouver une expression qui, multipliée par ce diviseur d'après les règles convenues, donne pour produit le dividende; ce quotient est donc $\cos nx - \sqrt{-1}\sin nx$.

Donc

$$(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^{-n} = \cos(-nx) + \sqrt{-1}\sin(-nx).$$

La formule (1) est donc vraie, quelque valeur réelle qu'ait m, en observant toutefois que si la puissance m est susceptible de plusieurs valeurs, nous avons seulement prouvé ici que le second membre en est une.

341. Nous allons résoudre maintenant la question inverse, qui consiste à développer $\cos^m x$ et $\sin^m x$ au moyen des cosinus et sinus des arcs multiples de x, m étant un nombre entier.

Pour cela, nous poserons

$$\cos x + \sqrt{-1}\sin x = u,$$

$$\cos x - \sqrt{-1}\sin x = v;$$

d'où

$$2\cos x = u + v,$$

et, par suite,

$$2^m\cos^m x = u^m + mu^{m-1}v + \frac{m(m-1)}{1.2}u^{m-2}v^2 + \ldots + muv^{m-1} + v^m.$$

Observant maintenant que $uv = 1$, et que $u^k + v^k = 2\cos kx$, on aura

$$2^m\cos^m x = 2\cos mx + 2.m\cos(m-2)x + 2.\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x + \ldots$$

Si m est pair, le terme qui se trouve au milieu du dévelop-

pement de $(u+v)^m$ se réduit à $\dfrac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2\ldots\ldots\frac{m}{2}}$ et forme le dernier terme du développement de $2^m\cos^m x$. Si m est impair, les deux termes du milieu sont en u et v de la forme

$$u^{\frac{m+1}{2}}v^{\frac{m-1}{2}} \quad \text{et} \quad u^{\frac{m-1}{2}}v^{\frac{m+1}{2}},$$

expressions qui se réduisent respectivement à u et v, puisque $uv=1$. Le dernier terme du développement de $2^m\cos^m x$ est alors

$$2\frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m+3}{2}\right)}{1.2\ldots\ldots\left(\frac{m-1}{2}\right)}\cos x.$$

On développera maintenant $\sin^m x$, en observant que

$$2\sqrt{-1}\sin x = u - v,$$

d'où

$$2^m(\sqrt{-1})^m\sin^m x = u^m - mu^{m-1}v + \frac{m(m-1)}{1.2}u^{m-2}v^2\ldots;$$

ce qui signifie toujours que les parties réelles sont les mêmes de part et d'autre, ainsi que les coefficients de $\sqrt{-1}$, s'il y reste, ce qui n'arrivera que si m est impair.

Supposons d'abord m pair : les termes à égale distance des extrêmes seront de même signe, et, en les réunissant deux à deux, on trouvera

$$2^m(-1)^{\frac{m}{2}}\sin^m x = 2\cos mx - 2m\cos(m-2)x$$
$$+2\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x - \ldots;$$

le dernier terme sera

$$\pm \frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2\ldots\ldots\frac{m}{2}},$$

le signe + correspondant à $\frac{m}{2}$ pair, et le signe — à $\frac{m}{2}$ impair. Si m est impair, le développement pourra se mettre sous la forme

$$u^m - v^m - m(u^{m-2} - v^{m-2}) + \frac{m(m-1)}{1.2}(u^{m-4} - v^{m-4}) - \ldots,$$

en remplaçant partout uv par 1. Si donc on observe que $u^k - v^k = 2\sqrt{-1}\sin kx$, on aura, en ne prenant que les coefficients de $\sqrt{-1}$,

$$2^m(-1)^{\frac{m-2}{2}}\sin^m x = 2\sin mx - 2m\sin(m-2)x$$
$$+ 2\frac{m(m-1)}{1.2}\sin(m-4)x - \ldots;$$

le dernier terme sera

$$\pm 2\frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m+3}{2}\right)}{1.2\ \ldots\ \left(\frac{m-1}{2}\right)}\sin x,$$

le signe + ayant lieu quand $\frac{m-1}{2}$ sera pair, et le signe — quand il sera impair.

342. Examinons maintenant en quoi consiste l'avantage que l'emploi de $\sqrt{-1}$ a procuré dans la recherche des développements de $\cos^m x$ et $\sin^m x$.

Nous avons remplacé $2\cos x$ par

$$\cos x + \sqrt{-1}\sin x + \cos x - \sqrt{-1}\sin x,$$

qui lui est identique, puisque les deux termes

$$\sqrt{-1}\sin x \quad \text{et} \quad -\sqrt{-1}\sin x,$$

traités comme s'ils représentaient des nombres, se détruisent. Et même si, au lieu de $\sqrt{-1}$, on met une quantité λ indéterminée, on pourra remplacer $2\cos x$ par

$$(\cos x + \lambda \sin x) + (\cos x - \lambda \sin x);$$

et quelque calcul que l'on effectue sur cette expression, le résultat sera nécessairement indépendant de λ, et les puissances d'un même degré quelconque de cette lettre auront zéro pour coefficient. Or prendre seulement les termes réels du résultat, c'est négliger les puissances impaires de λ et ne conserver que les puissances paires, ce qui est permis, puisque les coefficients de chaque puissance de λ sont nuls. Mais quand on remplacera λ^2 par -1, il pourra y avoir des réductions entre les termes correspondants à des puissances différentes de λ, et notamment avec ceux qui ne renfermaient pas λ, et qui sont précisément ceux que l'on trouverait en ne transformant pas d'abord $2\cos x$. Il peut donc résulter de là de nouvelles combinaisons qui, sans altérer la valeur du résultat, lui donnent une forme plus commode. Cela revient à ajouter au résultat des quantités qui se détruisent: mais à chaque instant, dans l'algèbre, on voit de pareils artifices faciliter les transformations; et ce qui fait que, dans le cas actuel, on en retire réellement un très-grand avantage, c'est que les deux binômes dont la somme remplace $2\cos x$ sont tels, que les puissances de chacun d'eux s'effectuent immédiatement par la multiplication de l'arc, et que le produit des puissances semblables de l'un et l'autre est l'unité. Il résulte de là que la puissance $m^{\text{ième}}$ de $\cos x$ se trouve immédiatement exprimée au moyen des cosinus des arcs multiples de x; et il est de même pour $\sin^m x$.

Usage des lignes trigonométriques pour l'extraction des racines des quantités réelles ou imaginaires.

343. Les racines de degré m d'un nombre réel positif ou négatif $\pm$ A, sont les racines de l'équation

$$y^m \mp A = 0;$$

ces racines peuvent se ramener à celles de l'unité, en posant $y = ax$, a désignant la racine $m^{ième}$ arithmétique du nombre A; l'équation proposée se trouve ainsi ramenée à la suivante:

$$x^m \mp 1 = 0,$$

dont nous allons déterminer les m racines, qui sont toutes inégales, puisqu'il n'y a pas de commun diviseur entre le premier membre et sa dérivée. Soit d'abord

$$x^m - 1 = 0, \quad \text{ou} \quad x^m = 1.$$

Nous pouvons représenter 1 par une expression de la forme $\cos z + \sqrt{-1}\sin z$, dont nous savons qu'il est facile d'extraire la racine. Il suffit de poser $z = 2n\pi$, n étant un nombre entier quelconque positif ou négatif; et l'on aura identiquement

$$1 = \cos 2n\pi + \sqrt{-1}\sin 2n\pi.$$

Donc l'expression

$$(1) \qquad \cos\frac{2n\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{2n\pi}{m}$$

donne des racines $m^{ièmes}$ de 1, et, par conséquent, des valeurs de x pour toute valeur entière de n.

Or on reconnaît immédiatement que l'expression (1) ne change pas quand on augmente ou qu'on diminue n de m ou d'un multiple entier quelconque de m. Il suffit donc,

dans la série indéfinie des nombres entiers positifs ou négatifs, d'en prendre m consécutifs quelconques; ils donneront toutes les valeurs de l'expression (1). De plus, il est facile de voir qu'elles seront toutes différentes, parce que deux de ces arcs ne peuvent avoir le même sinus et le même cosinus; donc toutes les racines de l'équation

$$x^m - 1 = 0$$

seront données par la formule

$$x = \cos\frac{2n\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2n\pi}{m},$$

dans laquelle on donnera à n les valeurs 0, 1, 2, etc., jusqu'à ce que l'on ait m valeurs pour le second membre; car c'est comme si l'on donnait à n, m valeurs consécutives, les unes positives, les autres négatives.

Si m est pair, on posera $m = 2k$, et il viendra

$$x = \cos\frac{n\pi}{k} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{n\pi}{k}.$$

Il faudra alors donner à n les valeurs $0, 1, 2, \ldots, k$. Les deux extrêmes donnent $x = 1$, $x = -1$, et toutes les autres valeurs de x sont imaginaires, conjuguées et réciproques deux à deux.

Si l'on a

$$m = 2k + 1,$$

il faudra donner à n les valeurs $0, 1, 2, \ldots, k$.

La première donne $x = 1$; les autres sont toutes imaginaires, conjuguées et réciproques.

344. Soit maintenant

$$x^m + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x^m = -1, \quad \text{d'où} \quad x = \sqrt[m]{-1}.$$

On peut encore donner à -1 la forme $\cos z + \sqrt{-1}\sin z$, en posant $z = (2n + 1)\pi$. On aura donc des valeurs de x

par la formule

$$x = \cos\frac{(2n+1)\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{(2n+1)\pi}{m};$$

il suffira encore de prendre m valeurs consécutives de n, parce qu'elles correspondront toutes à des sinus ou cosinus différents, et toutes les autres valeurs de n fourniraient les mêmes valeurs pour x. Toutes les racines de l'équation

$$x^m + 1 = 0$$

sont donc données par la formule

$$x = \cos\frac{(2n+1)\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{(2n+1)\pi}{m},$$

en donnant à n des valeurs positives depuis zéro jusqu'à ce qu'il en résulte m valeurs pour le second membre. Si $m = 2k$, les valeurs de n seront $0, 1, 2, \ldots, k-1$, les valeurs de x seront toutes imaginaires, conjuguées et réciproques. Si $m = 2k+1$, les valeurs de n seront $0, 1, 2, \ldots, k$, la dernière donnera $x = -1$; toutes les autres valeurs de x seront conjuguées et réciproques.

Les racines de ± 1 étant connues, on aura celles de $\pm A$ en les multipliant par la racine arithmétique de A.

Les facteurs réels du premier et du second degré, dans lesquels peuvent se décomposer les binômes $x^m - 1$ et $x^m + 1$, peuvent être représentés par une construction fort simple, qui dépend de la division du cercle en parties égales, et qui a été donnée par le géomètre anglais Cotes.

345. Cherchons maintenant à extraire la racine $m^{ième}$ d'une expression de la forme

$$a \pm b\sqrt{-1}.$$

Nous pouvons la mettre sous la forme

$$\rho(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z),$$

en déterminant ρ et z par les deux équations

$$\rho \cos z = a, \quad \rho \sin z = b;$$

d'où

$$\rho = \pm \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos z = \frac{a}{\rho}, \quad \sin z = \frac{b}{\rho}.$$

Pour plus de commodité, nous ne prendrons que la valeur positive de ρ. Désignons par φ le plus petit arc positif ayant pour cosinus $\frac{a}{\rho}$ et pour sinus $\frac{b}{\rho}$; on pourra, sans que ces lignes changent, l'augmenter d'un nombre quelconque de circonférences, et l'on aura

$$a \pm b\sqrt{-1} = \rho\left[\cos(\varphi + 2n\pi) \pm \sqrt{-1}\sin(\varphi + 2n\pi)\right].$$

On aura des racines $m^{\text{ièmes}}$ de cette expression en prenant la racine $m^{\text{ième}}$ arithmétique de ρ, et la multipliant par la racine du second facteur, que l'on obtiendra par la division de l'arc; on a ainsi

$$\rho^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{\varphi + 2n\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{\varphi + 2n\pi}{m}\right).$$

Il suffit évidemment de donner à n, m valeurs consécutives, positives ou négatives; toutes les autres donneraient les mêmes résultats. De plus, ces m valeurs de n donnent des valeurs différentes pour les sinus ou cosinus de $\frac{\varphi + 2n\pi}{m}$; donc, en donnant à n les valeurs $0, 1, 2, \ldots m - 1$, toutes les valeurs de la racine cherchée seront données par la formule

$$\sqrt[m]{a \pm b\sqrt{-1}} = \rho^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{\varphi + 2n\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{\varphi + 2n\pi}{m}\right),$$

les signes supérieurs de $\sqrt{-1}$ se correspondant, ainsi que les inférieurs.

346. La transformation de $a \pm b\sqrt{-1}$ en $\rho(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)$ ramène toutes les opérations sur les quantités imaginaires aux opérations sur des expressions de la forme $\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z$, et nous avons vu que celles-ci se ramenaient toutes aux opérations immédiatement inférieures sur les arcs, propriétés tout à fait analogues à celles des exponentielles.

Cette analogie sera encore augmentée par les considérations suivantes.

Représentation des sinus et cosinus par des exponentielles imaginaires.

347. Si dans le développement de e^x on change x en $x\sqrt{-1}$, et qu'on représente la série résultante par $e^{x\sqrt{-1}}$, on aura

$$(1)\quad e^{x\sqrt{-1}} = 1 + x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots$$

Si l'on convient de même de désigner par $e^{-x\sqrt{-1}}$ le résultat de la substitution de $-x\sqrt{-1}$ à x dans le développement de e^x, on aura

$$(2)\quad e^{-x\sqrt{-1}} = 1 - x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} \ldots$$

Ces équations peuvent être écrites comme il suit :

$$(3)\quad \begin{cases} e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x, \\ e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\sin x; \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$(4)\quad \begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \\ \sin x = \dfrac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}; \end{cases}$$

et dans toutes ces formules il ne faut pas oublier que $e^{x\sqrt{-1}}$ et $e^{-x\sqrt{-1}}$ n'ont aucun sens comme exponentielles : elles ne représentent autre chose que les séries qu'on obtient en substituant $+x\sqrt{-1}$ et $-x\sqrt{-1}$ dans le développement de e^x, et traitant $\sqrt{-1}$ de la manière convenue.

348. Il est facile de démontrer que ces exponentielles imaginaires doivent être traitées d'après les mêmes règles que si les exposants étaient réels.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de multiplier $e^{x\sqrt{-1}}$ par $e^{y\sqrt{-1}}$, en entendant toujours par là les séries qui représentent ces expressions, et qui peuvent être remplacées par $\cos x + \sqrt{-1}\sin x$ et $\cos y + \sqrt{-1}\sin y$, dont le produit est $\cos(x+y) + \sqrt{-1}\sin(x+y)$. Cette dernière expression est représentée, dans le même sens, par $e^{(x+y)\sqrt{-1}}$; donc on peut poser

$$e^{x\sqrt{-1}}.e^{y\sqrt{-1}} = e^{(x+y)\sqrt{-1}}.$$

La règle des exposants réels s'observe donc dans la multiplication des exponentielles imaginaires, et, par suite, dans leur division, dans leur élévation à des puissances, et dans l'extraction de leurs racines.

On pourrait encore déduire cette proposition de ce que e^{x+y} étant égal à $e^x e^y$ pour toutes les valeurs réelles de x et y, on a identiquement

$$1 + \frac{(x+y)}{1} + \frac{(x+y)^2}{1.2} + \ldots = \left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots\right)\left(1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \ldots\right).$$

L'identité ne sera pas troublée en changeant dans les deux membres x en $x\sqrt{-1}$, ou y en $y\sqrt{-1}$; et l'on trouvera toujours les mêmes termes réels ou imaginaires avec les mêmes signes : d'où l'on conclut

$$e^{(x+y)\sqrt{-1}} = e^{x\sqrt{-1}}.e^{y\sqrt{-1}},$$

ou encore, en supposant qu'on change seulement y en $y\sqrt{-1}$,

$$e^{(x+y\sqrt{-1})} = e^x e^{y\sqrt{-1}} = e^x(\cos y + \sqrt{-1}\sin y).$$

349. On est convenu de donner le nom de logarithmes aux exposants imaginaires, comme aux exposants réels. Ainsi $x + y\sqrt{-1}$ est le logarithme de $e^x(\cos y + \sqrt{-1}\sin y)$; et pour avoir le logarithme d'une expression de la forme $a \pm b\sqrt{-1}$, on posera d'abord

$$a \pm b\sqrt{-1} = \rho(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x) = e^{1\rho \pm x\sqrt{-1}}$$
$$= e^{1\rho \pm (\varphi \pm 2n\pi)\sqrt{-1}},$$

φ étant la plus petite valeur positive de x, et l'on aura

$$1(a \pm b\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2}1(a^2 + b^2) \pm \sqrt{-1}(\varphi \pm 2n\pi).$$

Si $b = 0$, on a pour toutes les valeurs du logarithme de a,

$$1a \pm \sqrt{-1}(\varphi \pm 2n\pi).$$

L'arc φ est égal à 0 si a est positif, et égal à π si a est négatif. On a donc, en entendant par $1a$ le logarithme arithmétique du nombre a,

$$1(+a) = 1a \pm 2n\pi\sqrt{-1},$$
$$1(-a) = 1a \pm (2n+1)\pi\sqrt{-1}.$$

Cette dernière expression ne donne aucune valeur réelle; la première en donne une seule.

En faisant $a = 1$, on trouve

$$11 = \pm 2n\pi\sqrt{-1}, \quad 1(-1) = \pm(2n+1)\pi\sqrt{-1}.$$

350. On peut exprimer, au moyen des formules pré-

cédentes, les racines des équations de la forme

$$x^{2m} + px^m + q = 0.$$

En effet, on en tire d'abord

$$x^m = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Si l'on a $\frac{p^2}{4} - q > 0$, ou $= 0$, les valeurs de x seront les racines de quantités réelles, et nous avons vu comment on pouvait les exprimer au moyen des lignes trigonométriques.

Si l'on a $\frac{p^2}{4} - q < 0$, les valeurs de x^m seront de la forme $a \pm b\sqrt{-1}$, et l'on en extraira les racines $m^{\text{ièmes}}$, comme nous l'avons indiqué en dernier lieu.

Si l'on forme, d'après les valeurs de ces racines, les facteurs réels de $x^{2m} + px^m + q$, on reconnaît immédiatement une construction simple qui les représente géométriquement, et qui repose sur la division du cercle en parties égales. Nous nous dispenserons d'entrer dans ces détails.

NOTE TROISIÈME.

Sur la plus courte distance de deux droites infiniment voisines.

351. Si l'on considère une série de droites dont les équations générales renferment une ou plusieurs constantes dont les valeurs puissent varier arbitrairement et d'une manière continue, la plus courte distance de deux de ces droites, correspondantes à des différences

infiniment petites entre les constantes, peut être du même ordre que ces différences, ou d'un ordre différent. Considérons, par exemple, les normales à une même surface, menées par deux points situés sur cette surface, à une distance infiniment petite *ds*. Leur plus courte distance sera généralement du même ordre de grandeur que *ds*. Mais si les deux points sont situés sur une même ligne de courbure, cette distance est d'un ordre plus élevé, comme nous l'avons démontré.

De même encore les normales principales d'une courbe à double courbure, c'est-à-dire celles qui passent par ses centres de courbure, ont une distance mutuelle qui est du même ordre que celle des points correspondants de la courbe. Mais si l'on prend la série des normales tangentes à une même développée de la courbe, la plus courte distance de deux de ces normales consécutives sera d'un ordre plus élevé que celle des points correspondants de la courbe proposée.

L'objet de cette note est de déterminer avec plus de précision qu'on ne l'avait fait jusqu'ici l'ordre infinitésimal de cette distance, et c'est ce que nous ferons au moyen d'une remarque curieuse due à M. Bouquet, ancien élève de l'École normale. Elle consiste en ce que, *si dans une série continue quelconque de droites, la distance de deux consécutives est généralement d'un ordre supérieur au premier, elle est au moins du troisième.*

Soient, en effet,

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + 6$$

les équations d'une droite quelconque de la série; Δa, Δb, $\Delta\alpha$, $\Delta 6$ les accroissements des constantes, en passant à une droite infiniment voisine, faisant partie de la même série : la plus courte distance δ de ces deux droites sera,

d'après une formule élémentaire connue,

$$\delta = \frac{\Delta a \Delta 6 - \Delta b \Delta \alpha}{\sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2 + (a\Delta b - b\Delta a)^2}}.$$

Or, quel que soit le nombre des variables indépendantes qui déterminent les quantités a, b, α, 6, on aura

$$\Delta a = da + \frac{1}{2} d^2 a + \frac{1}{2.3} d^3 a + \ldots,$$

$$\Delta b = db + \frac{1}{2} d^2 b + \frac{1}{2.3} d^3 b + \ldots,$$

$$\Delta \alpha = d\alpha + \frac{1}{2} d^2 \alpha + \frac{1}{2.3} d^3 \alpha + \ldots,$$

$$\Delta 6 = d6 + \frac{1}{2} d^2 6 + \frac{1}{2.3} d^3 6 + \ldots;$$

il en résulte

$$\Delta a \Delta 6 - \Delta b \Delta \alpha = (dad6 - dbd\alpha)$$
$$+ \tfrac{1}{2}(dad^2 6 + d6 d^2 a - dbd^2 \alpha - d^2 b d\alpha) + \ldots.$$

Or, si le premier terme $dad6 - dbd\alpha$ n'est pas nul, le dénominateur de δ étant un infiniment petit du premier ordre, et son numérateur du second, δ sera du premier ordre. Si, au contraire, on a constamment

$$dad6 - dbd\alpha = 0,$$

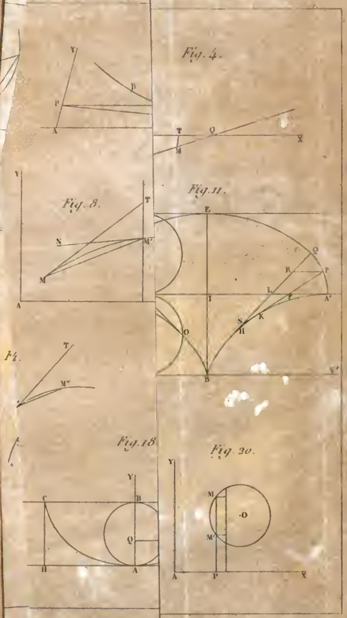
le numérateur devient d'un ordre plus élevé de deux unités, parce que l'ensemble des termes du troisième ordre n'est autre chose que la moitié de la différentielle de $dad6 - dbd\alpha$, et cette dernière quantité étant constamment nulle, sa différentielle l'est aussi.

D'où résulte cette conséquence remarquable, que, *si la distance de deux droites consécutives, prises dans une série quelconque, est généralement d'un ordre infinitésimal supérieur au premier, elle est au moins du troisième.*

Cette proposition s'applique aux tangentes à une courbe à double courbure, aux normales à une surface, menées par les différents points d'une même ligne de courbure, etc.

Le théorème que nous venons de démontrer est soumis, comme presque tous les autres, à des exceptions très-particulières; il est fondé sur des développements généralement possibles, mais qui, pour certains points singuliers, pourraient devenir illusoires.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.


Fig. 4.
Fig. 8.
Fig. 11.
Fig. 18
Fig. 30.
Gravé par E. Wormser